

2017年9月25日 第2回 理研データ同化ワークショップ

アンサンブル4次元変分法を活用した 巨大波浪の再現

藤本航、早稲田卓爾

東京大学 新領域創成科学研究科 海洋技術環境学専攻

導入:フリーク波とは

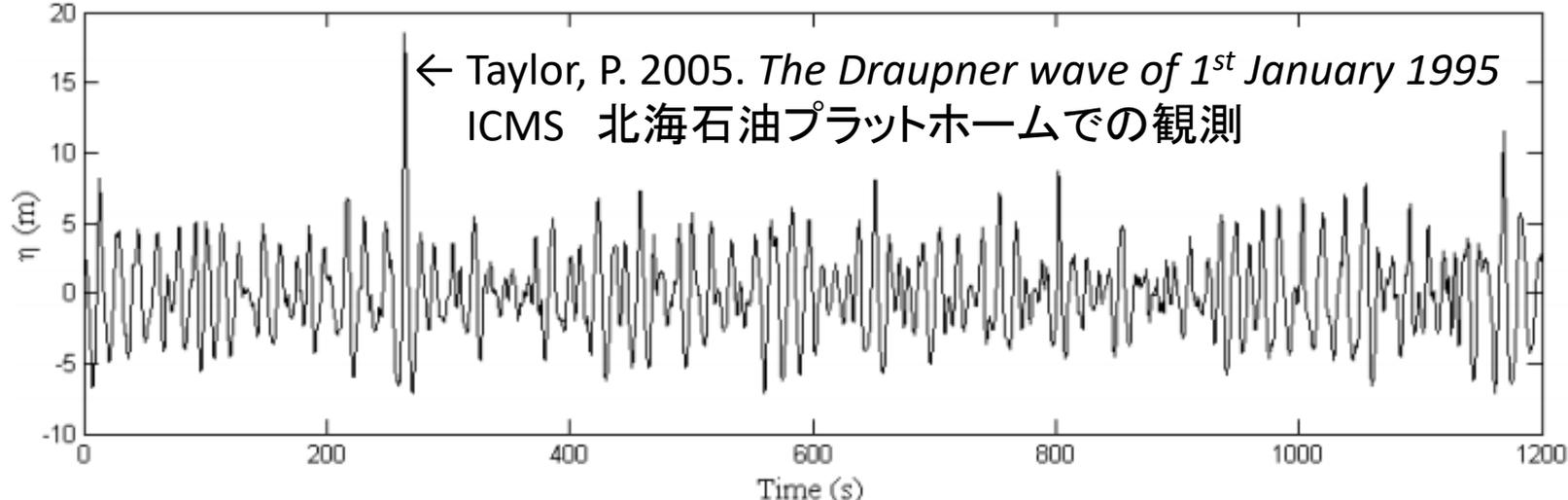


海洋に突発的に生じる巨大波

波浪場の平均的な振幅 (H_S : 有義波高) を大きく超える波

$$\frac{H}{H_S} > 2 \text{ or } \frac{\eta_{crest}}{H_S} > 1.3$$

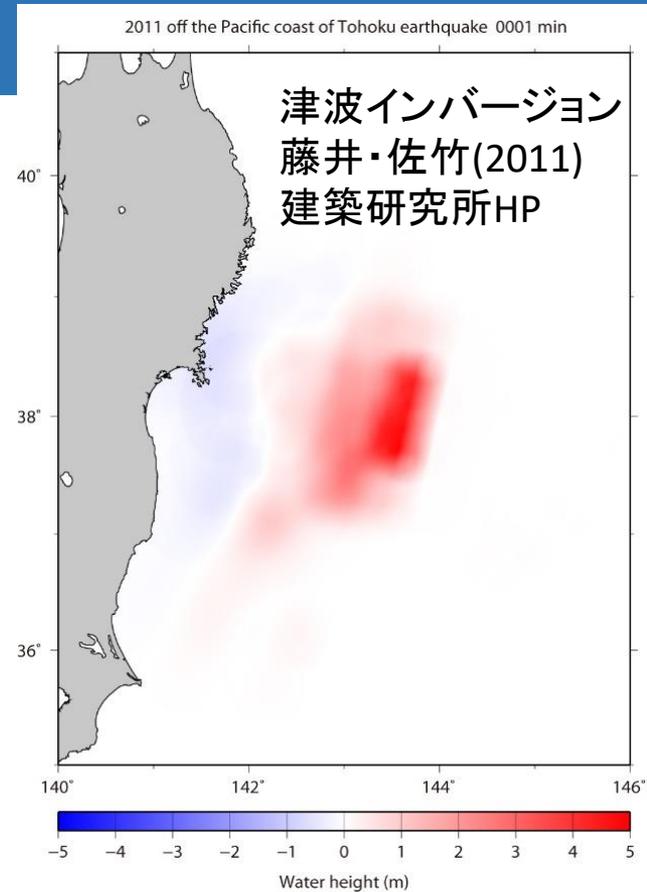
工学的: 船舶・海洋構造物の安全



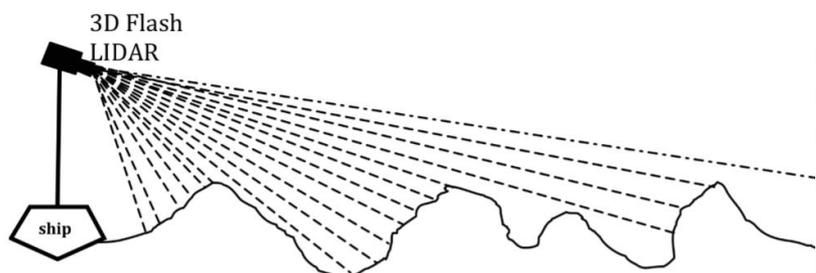
日本近海でも観測

観測データからの波形再構成

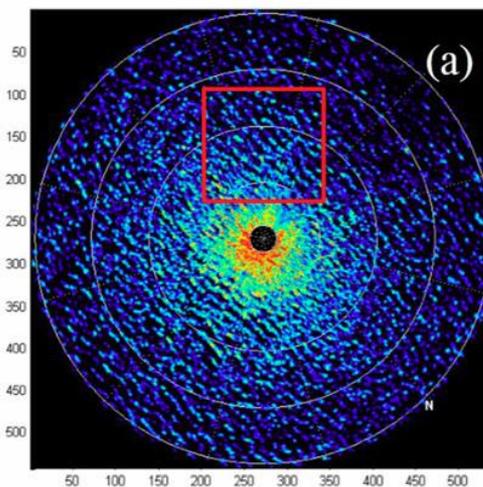
- ✓フリーク波の推定、物理の研究
 - ✓船舶・海洋構造物・発電機の事故解析
- ✓逆問題、データ同化、再解析
 - ✓津波インバージョンの深海波ver.
 - ✓「フリーク波インバージョン」
- ✓想定する観測データ
 - ✓ブイ、波高計、レーダー、LIDARなど



Nouguier and Guerin (2014)



船舶からのLIDAR波浪計測



K-TRITON buoy



1. フリーク波を再構成するには、非線形性を考慮する必要がある
2. 波浪の非線形時間発達を解ける手法があるが、通常の4次元変分法(アジョイント法)を適用するには課題が多い
3. アンサンブル4次元変分法を用いて、フリーク波を再構成する

波浪の非線形性とフリーク波の関係

基礎方程式系 (Euler方程式)

連続の式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\nabla^2 \phi \quad -d \leq z \leq \eta$$

水底境界条件

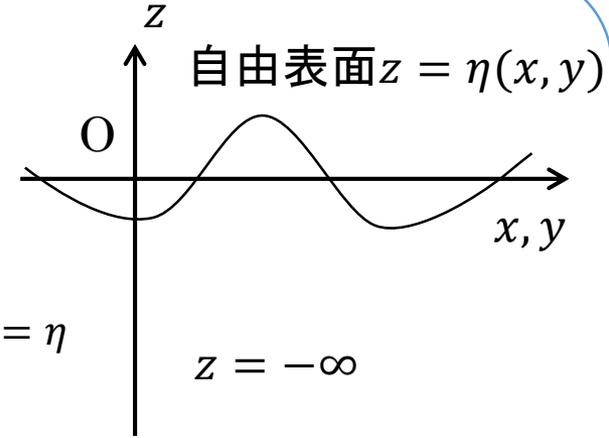
$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = -\infty$$

運動学的自由境界条件

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\nabla \phi \cdot \nabla \eta + (1 + (\nabla \eta)^2) W \quad \text{at } z = \eta$$

力学的自由境界条件

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + g\eta + \frac{1}{2} (1 + (\nabla \eta)^2) W^2 \quad \text{at } z = \eta$$



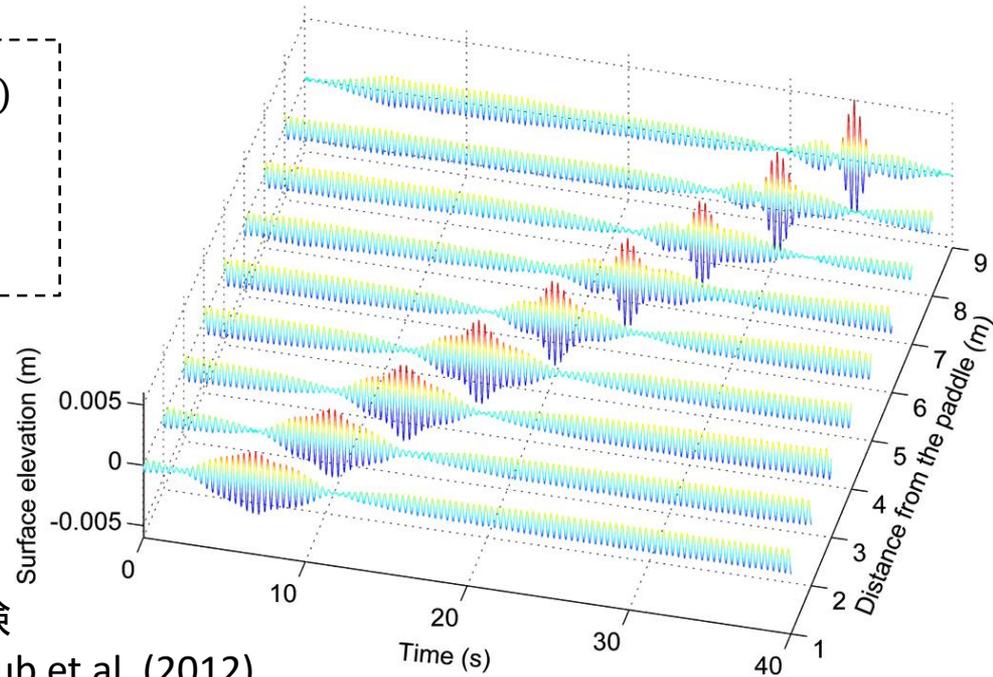
表面上の速度ポテンシャル $\Phi = \phi(x, y, z = \eta, t)$

表面上の鉛直速度 $W = \partial_z \phi(x, y, z = \eta, t)$

水平方向のナブラ $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$

非線形性によって振幅が局所的に増大
 = 変調不安定、フリーク波のモデル
 (Benjamin & Feir 1967)

水槽実験
 Chabchoub et al. (2012)



Higher Order Spectral Method (HOSM)

Dommermuth & Yue (1987), West et al (1987)

Euler方程式を解く、海洋波浪のDNS

- ラプラス方程式の解から、空間微分をFFTで評価 (スペクトル法)
 - 高速高精度
- 任意の次数の非線形性、広いスペクトル幅を考慮

自由境界条件について

ϕ, W は $z=0$ 周りにテイラー展開 (摂動展開)

表面上の速度ポテンシャル $\Phi = \phi(x, y, z = \eta, t)$

表面上の鉛直速度 $W = \partial_z \phi(x, y, z = \eta, t)$

水平方向のナブラ $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = w^{(1)}$$

$$- \nabla \Phi \cdot \nabla \eta + w^{(2)}$$

$$+ w^{(3)} + w^{(1)} |\nabla \eta|^2 \dots$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -g\eta$$

$$- \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + \frac{1}{2} w^{(1)} w^{(1)}$$

$$+ w^{(1)} w^{(2)} \dots$$

$$\phi_0^1 = \Phi$$

$$w^{(1)} = \frac{\partial \phi_0^1}{\partial z}$$

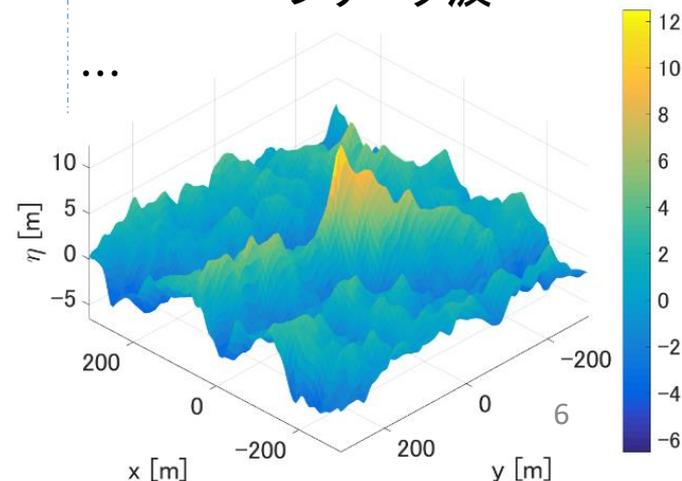
$$\phi_0^2 = -\eta \frac{\partial \phi_0^1}{\partial z}$$

$$w^{(2)} = \frac{\partial \phi_2^0}{\partial z} + \eta \frac{\partial^2 \phi_0^1}{\partial z^2}$$

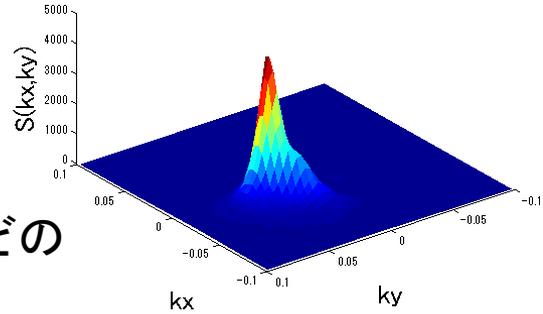
$$\phi_0^3 = -\eta \frac{\partial \phi_0^2}{\partial z} - \frac{\eta^2}{2!} \frac{\partial \phi_0^1}{\partial z}$$

$$w^{(3)} = \frac{\partial \phi_3^0}{\partial z} + \eta \frac{\partial^2 \phi_0^2}{\partial z^2} + \frac{\eta^2}{2!} \frac{\partial^3 \phi_0^1}{\partial z^3}$$

HOSMで計算された
フリーク波



観測値と波浪予報モデルを用いた波浪場の再構築



WAVEWATCH IIIなどの
波浪予報モデル
(パワースペクトルのみ出力)

初期波浪場

$$\hat{\eta}_0(k) = A(k) \exp(2\pi i \psi(k))$$

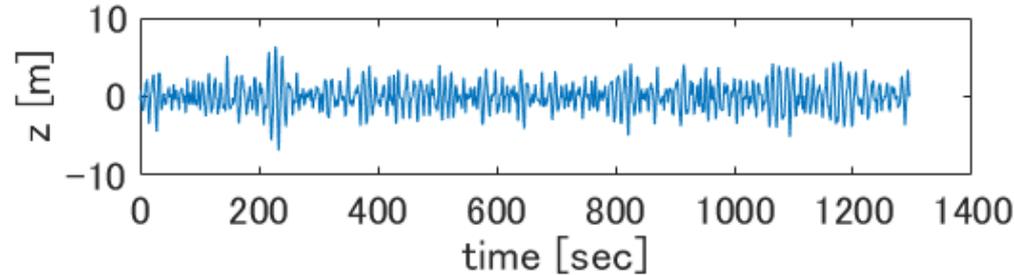
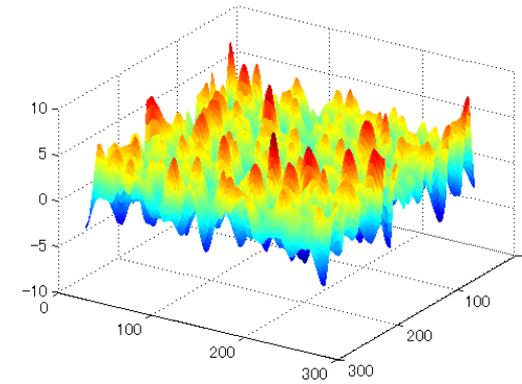
パワースペクトルの
背景値 $S(k)$

振幅 $A(k)$

観測データ y

HOSM
データ同化

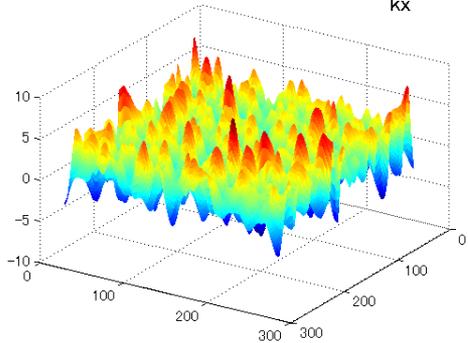
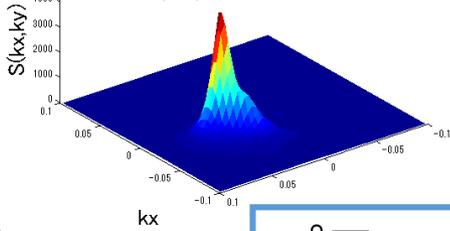
位相 $\psi(k)$



波浪予報モデルは、パワースペクトルしか出力しない
波浪のDNSと組み合わせることで、観測データから位相も復元する(振幅も調整)
4次元変分法を適用(空間的に小量な、時系列データを想定)

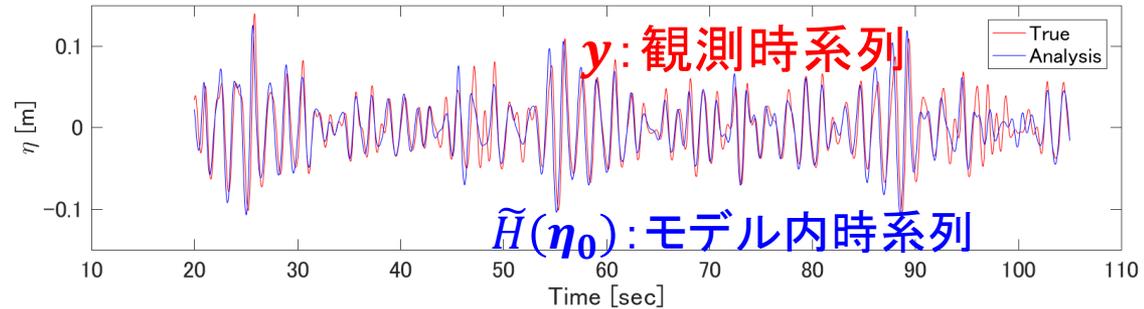
4次元変分法の適用とコスト関数の定式化

WAVEWATCH IIIなどの
波浪予報モデルによる
パワースペクトル $S(k)$



制御変数

$\hat{\eta}_0$: 初期波形のフーリエ係数



パワースペクトルの
背景値 $S(k)$

観測データ y

$$L(\hat{\eta}_0) = \frac{\lambda}{2} \hat{\eta}_0^* \mathbf{D}^{-1} \hat{\eta}_0 + \frac{1}{2} \|\tilde{H}(\hat{\eta}_0) - y\|^2$$

HOSM

HOSMで力学を考慮することで
観測演算子を時間方向に拡張

- \mathbf{D} は対角行列とすることができ、逆行列 \mathbf{D}^{-1} を容易に計算、メモリの節約
 - 初期波形がフーリエ係数で表されるため(異なる成分波は無相関)
 - $\text{diag}(\mathbf{D}) = S(k)$
 - $S(k)$ を背景誤差共分散とみなしている
- λ はチューニングパラメタ L2正則化(Tikhonov正則化)

Higher Order Spectral Method (HOSM)

Dommermuth & Yue (1987), West et al (1987)

Euler方程式 (NLSと同じ基礎方程式系) を解く、海洋波浪のDNS

- ラプラス方程式の解から、空間微分をFFTで評価 (スペクトル法)
 - 高速高精度
- 任意の次数の非線形性、広いスペクトル幅を考慮

自由境界条件について

Φ, W は $z=0$ 周りにテイラー展開 (摂動展開)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} &= w^{(1)} - \nabla \Phi \cdot \nabla \eta + w^{(2)} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= -g\eta - \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + \frac{1}{2} w^{(1)} w^{(1)} \end{aligned}$$

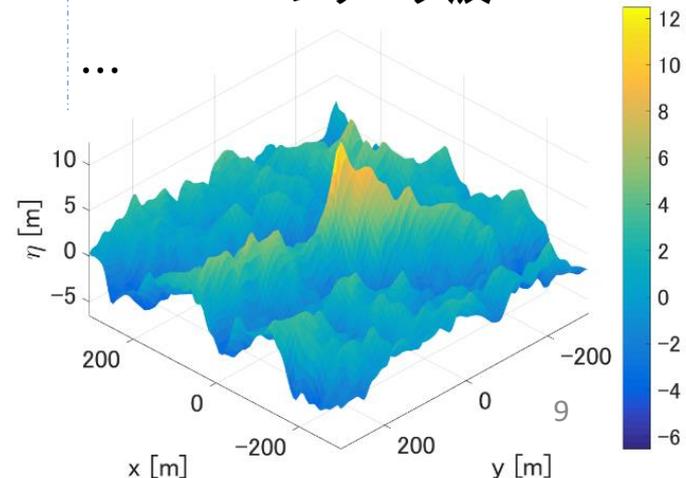
$$\begin{aligned} \phi_0^1 &= \Phi \\ \phi_0^2 &= -\eta \frac{\partial \phi_0^1}{\partial z} \\ \phi_0^3 &= -\eta \frac{\partial \phi_0^2}{\partial z} - \frac{\eta^2}{2!} \frac{\partial \phi_0^1}{\partial z} \\ w^{(1)} &= \frac{\partial \phi_0^1}{\partial z} \\ w^{(2)} &= \frac{\partial \phi_0^2}{\partial z} + \eta \frac{\partial^2 \phi_0^1}{\partial z^2} \\ w^{(3)} &= \frac{\partial \phi_0^3}{\partial z} + \eta \frac{\partial^2 \phi_0^2}{\partial z^2} + \frac{\eta^2}{2!} \frac{\partial^3 \phi_0^1}{\partial z^3} \end{aligned}$$

アジョイント法を適用するのは困難

- 摂動展開を多用する (Aragh & Nwogu 2008)
 - フォワード計算に時間がかかるので、アジョイント方程式にも時間がかかる
- ⇒ アンサンブル4次元変分法

$$\begin{aligned} &+ w^{(3)} + w^{(1)} |\nabla \eta|^2 \dots \\ &+ w^{(1)} w^{(2)} \dots \end{aligned}$$

HOSMで計算された
フリーク波



アンサンブル4次元変分法(1)

$\tilde{H}(\eta_0)$ は初期波形から観測時系列を出力する
(力学を考慮し、時間方向に拡張された)観測演算子

初期波形 η_0 の摂動ベクトル
 $\mathbf{P} = (\dots \mathbf{p}_m \dots)$
が張る空間(モデル空間)

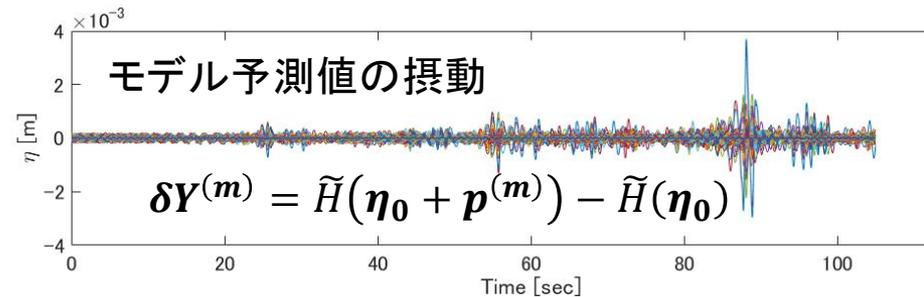
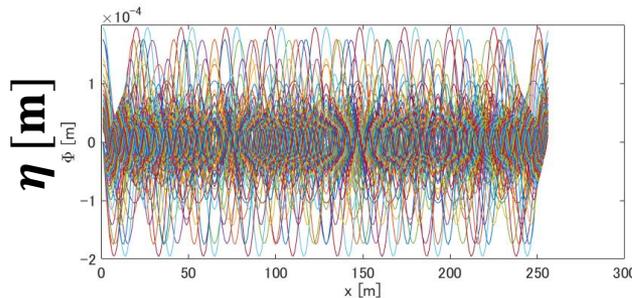
$$\delta\mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{P}$$

\tilde{H} の線形化
 $\tilde{\mathbf{H}}$ (ヤコビアン)

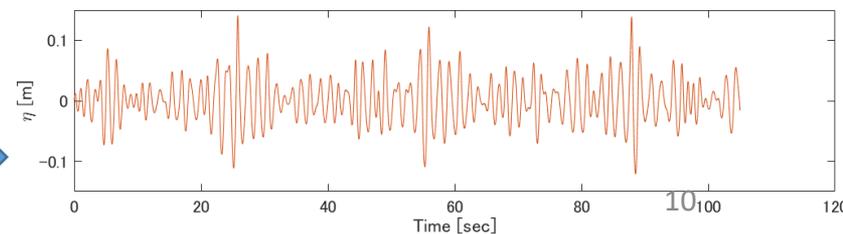
観測値 y の摂動ベクトル
 $\delta\mathbf{Y} = (\dots \delta Y_m \dots)$
が張る空間(観測空間)

$$\delta Y^{(m)} = \tilde{H}(\eta_0 + \mathbf{p}^{(m)}) - \tilde{H}(\eta_0) \approx \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{p}^{(m)}$$

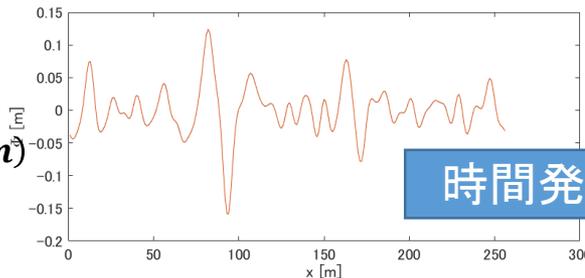
摂動 $\mathbf{p}^{(m)}$
cos波、sin波



モデル予測値 $\tilde{H}(\eta_0^{(m)})$



摂動を与えられた
アンサンブルラン
 $\eta_0^{(m)} = \eta_0 + \mathbf{p}^{(m)}$



時間発展

アンサンブル4次元変分法(2)

初期波形 η_0 の摂動ベクトル
 $\mathbf{P} = (\dots \mathbf{p}_m \dots)$
が張る空間(モデル空間)

$$\delta\mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{P}$$

観測値 \mathbf{y} の摂動ベクトル
 $\delta\mathbf{Y} = (\dots \delta Y_m \dots)$
が張る空間(観測空間)

初期値
の更新
 $\mathbf{P}s$

ミスフィット
 $\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{H}}(\hat{\eta}_0)$

コスト関数の勾配

$$\nabla L = \tilde{\mathbf{H}}^T (\tilde{\mathbf{H}}(\hat{\eta}_0) - \mathbf{y})$$

\mathbf{P} が張る空間上で勾配の残差を最小化する。

$$\mathbf{P}^T \nabla L = \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{H}}^T (\tilde{\mathbf{H}}(\hat{\eta}_0 + \mathbf{P}s) - \mathbf{y}) = 0$$

$$\mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{H}}^T (\tilde{\mathbf{H}}(\hat{\eta}_0) + \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{P}s - \mathbf{y}) + \mathcal{O}(\|s\|^2) = 0$$

$$\delta\mathbf{Y}^T (\tilde{\mathbf{H}}(\hat{\eta}_0) + \delta\mathbf{Y}s - \mathbf{y}) = 0$$

$$\delta\mathbf{Y}^T \delta\mathbf{Y}s = \delta\mathbf{Y}^T (\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{H}}(\eta_0))$$

$\tilde{\mathbf{H}}^T$ を解析的に求めるのが
通常の4次元変分法
(アジョイント法)

次の初期値を摂動 \mathbf{p}_m の線形和
で表す。 s は重み係数

$$\hat{\eta}_0 + \mathbf{P}s \rightarrow \hat{\eta}_0$$

各イタレーションで
観測演算子 $\tilde{\mathbf{H}}(\hat{\eta}_0)$ のヤコビアン $\tilde{\mathbf{H}}$
をアンサンブル摂動計算によって
 $\hat{\eta}_0$ の周りで線形近似

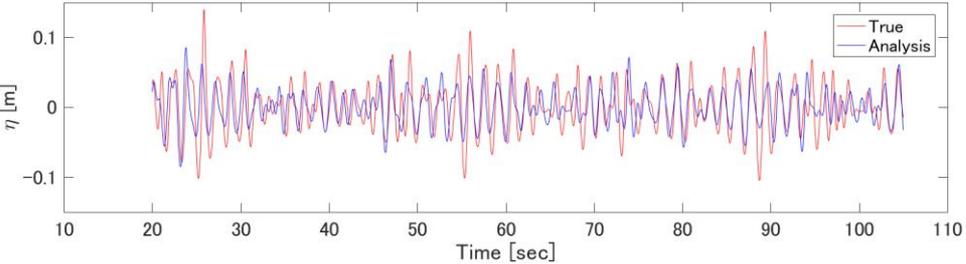
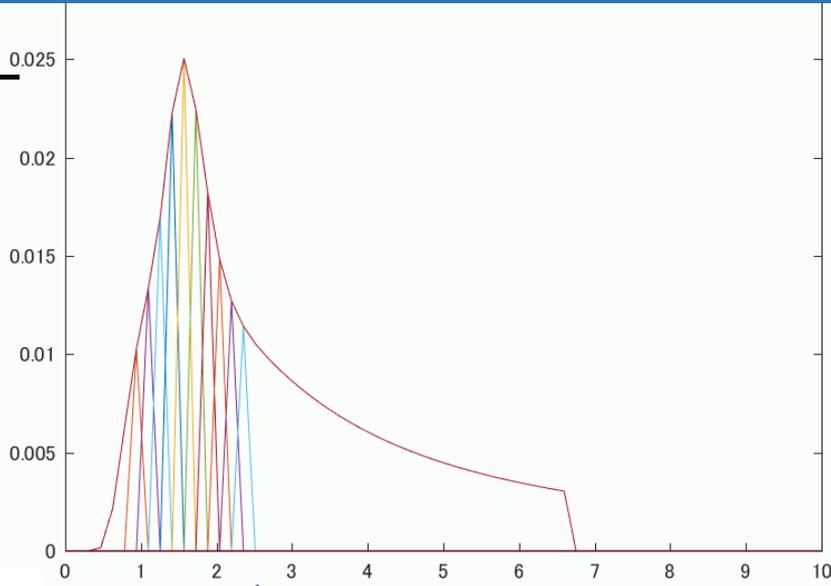
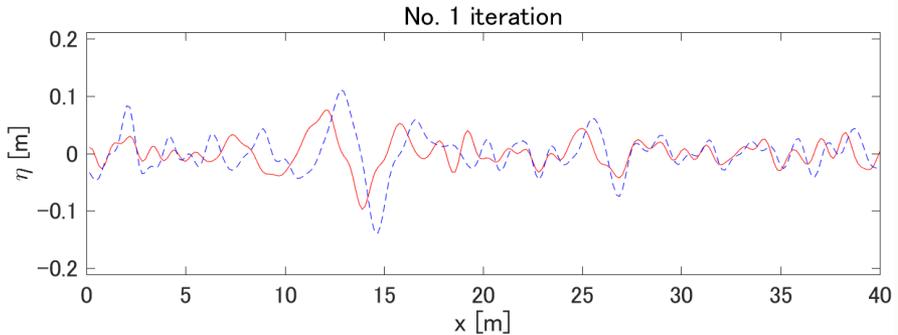
- ✓ アジョイント方程式が不要
- ✓ 並列化が容易

アンサンブル4次元変分法の種類

- Maximum Likelihood Ensemble Filter (MLEF, Zupanski 2005)
 - 摂動は、ヘッシアン行列のコレスキー分解から与える
 - ヘッシアン行列の固有値が大きいモードを調整する
 - 4DVARとアンサンブルカルマンフィルター(ETKF)の折衷
 - 摂動から勾配とヘッシアン行列を近似
- En4DVAR (Liu et al. 2008, 2009)
 - 摂動を固定する
 - 気象では、発達する擾乱モードを常に追いかけているので、それを摂動に与える
 - ヘッシアン行列を直接求めない(最急降下法)
 - 予報誤差共分散行列に局所化を用いる
- Adjoint-free 4DVAR (a4dVar, Yaremchuk et al. 2009, 2016)
 - 摂動は、モデルデータや観測値のEOFから与える
 - 固有値が大きいモードを与える
 - 発達する擾乱モードについての事前情報が無く、観測がスパースな、海洋の問題に適している
 - 摂動で得られたデータを再利用する
 - 全てのモードを調整する。保存系に近く、スペクトルが広い問題に適している。GMRESと関係
 - 摂動から勾配とヘッシアン行列を近似

① ミスフィットのパワースペクトルから摂動を選択

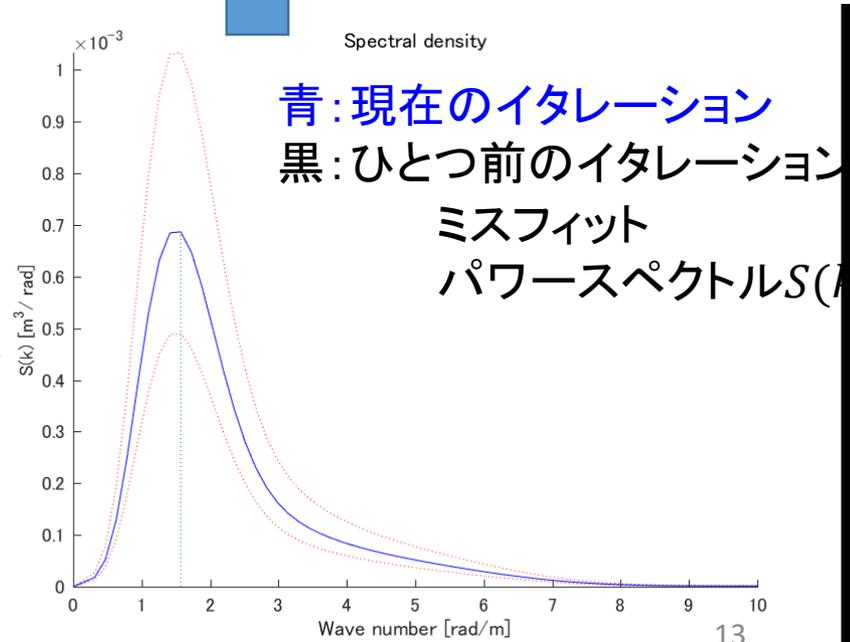
- 本手法では、ミスフィット $y - \tilde{H}(\hat{\eta}_0)$ のパワースペクトルを計算し、そのピーク付近に相当するフーリエモードを摂動 P として加える



ミスフィットパワースペクトル $S(\omega)$

線型分散関係で変換

$$\omega^2 = gk$$



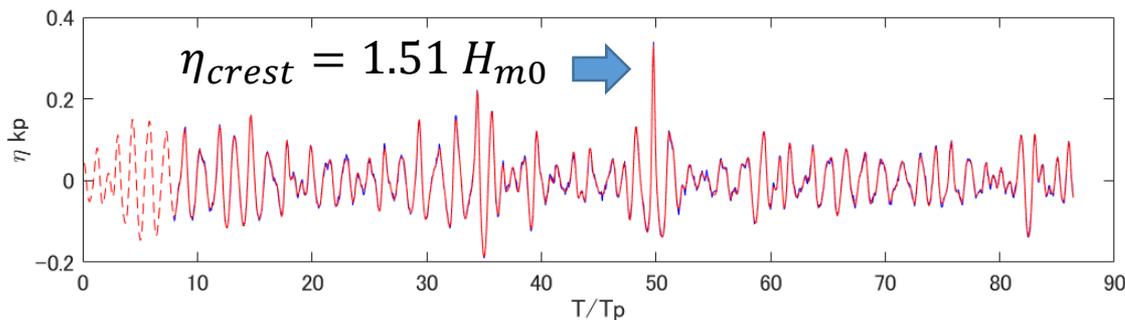
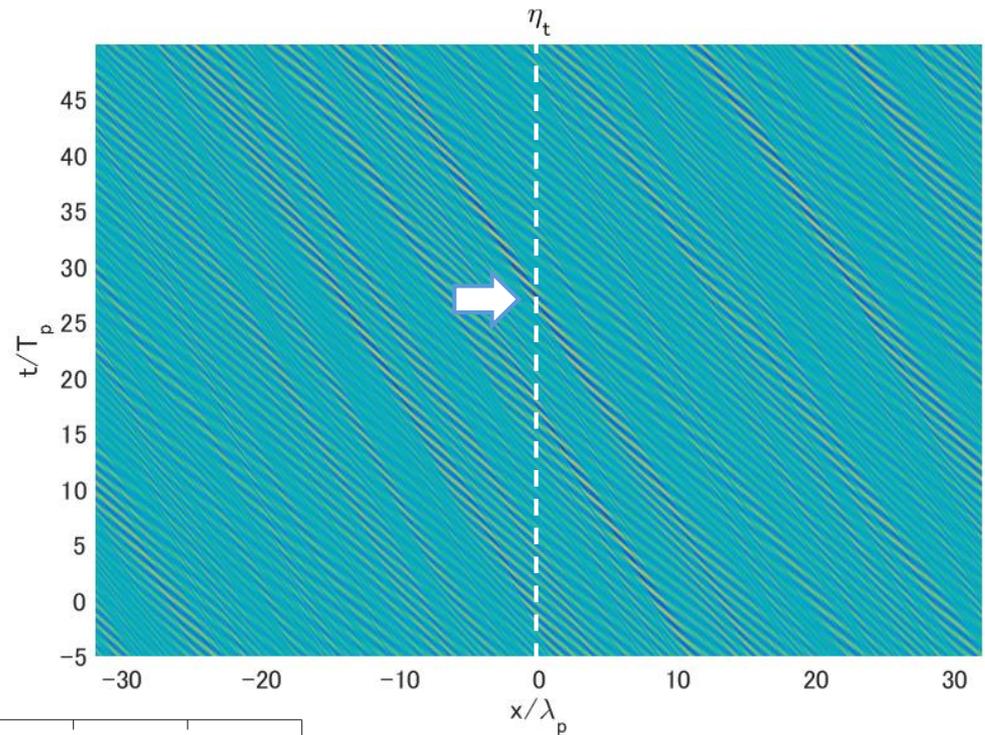
具体的な計算設定

- HOSM 3次非線形
- 時間: 50 T_p (ピーク周期)
- JOSNWAP $\gamma=3.3$
- 波形勾配: $H_s/2 * k_p = 0.11$
 - 比較的強い非線形性

周期境界条件の影響

128 λ_p の領域で真値を生成

32 λ_p 領域内で推定



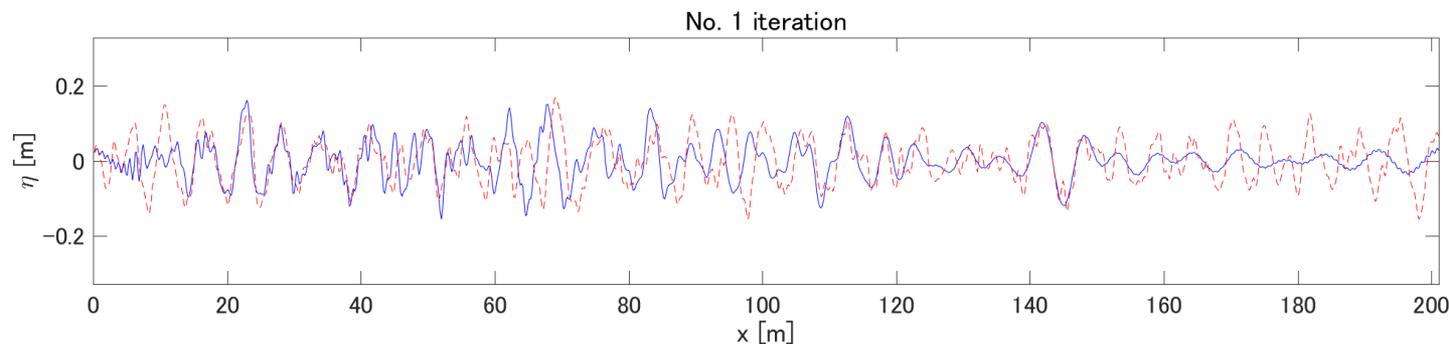
ノイズ: 正規乱数
標準偏差は真の値の10%

32 λ_p 領域内で同化

青: 線形推定値

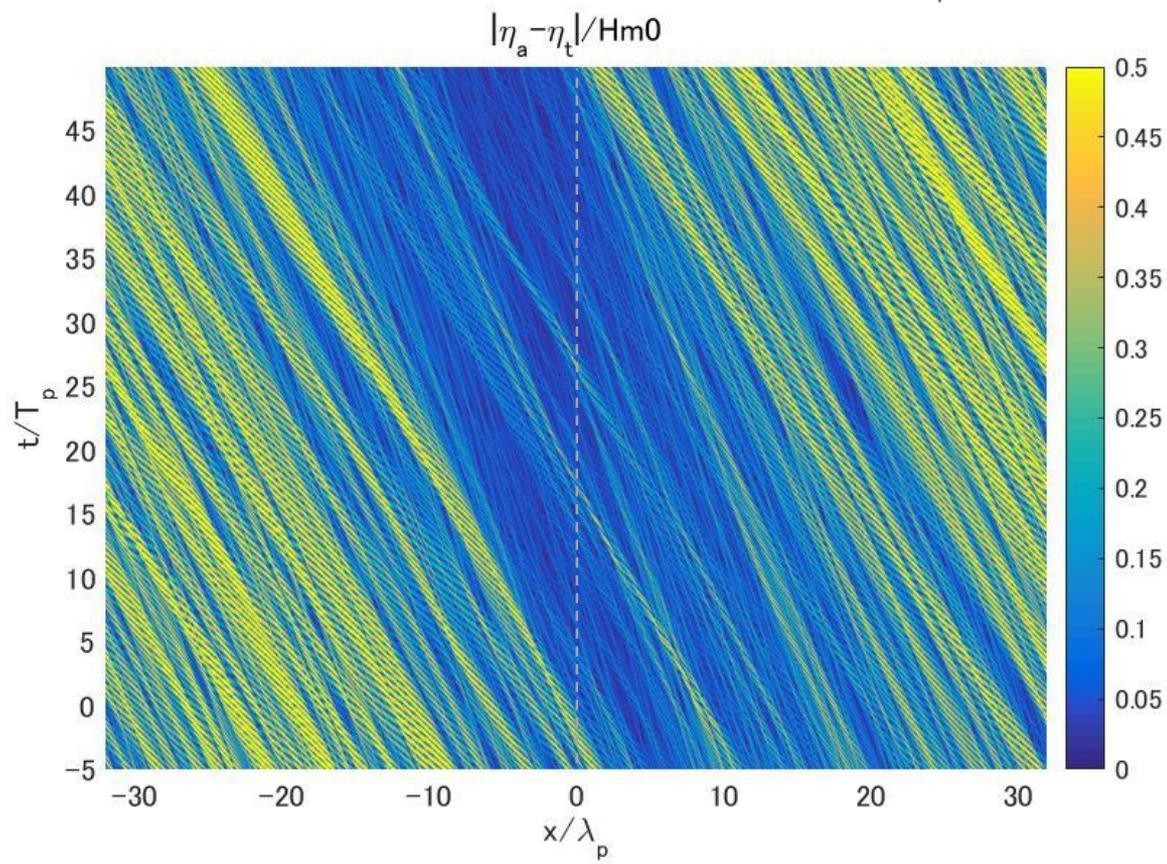
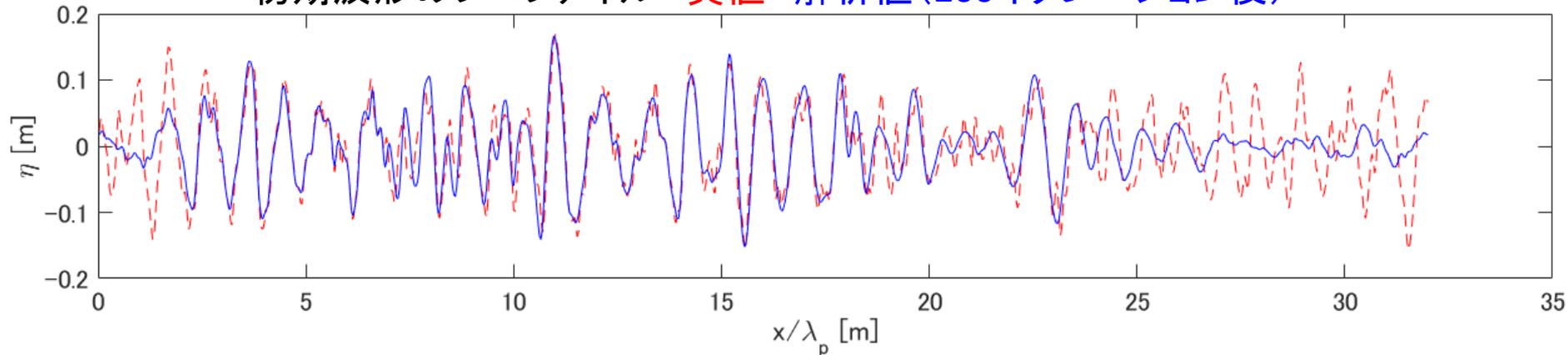
赤: 真値

特にフリーク波につ
ながる波群の周辺
で精度が不足



$\lambda=0.005$, $N_{ens}=50$, $e_{TOL} = 0.2$ の場合の解析値

初期波形のプロファイル 真値 解析値(200イタレーション後)



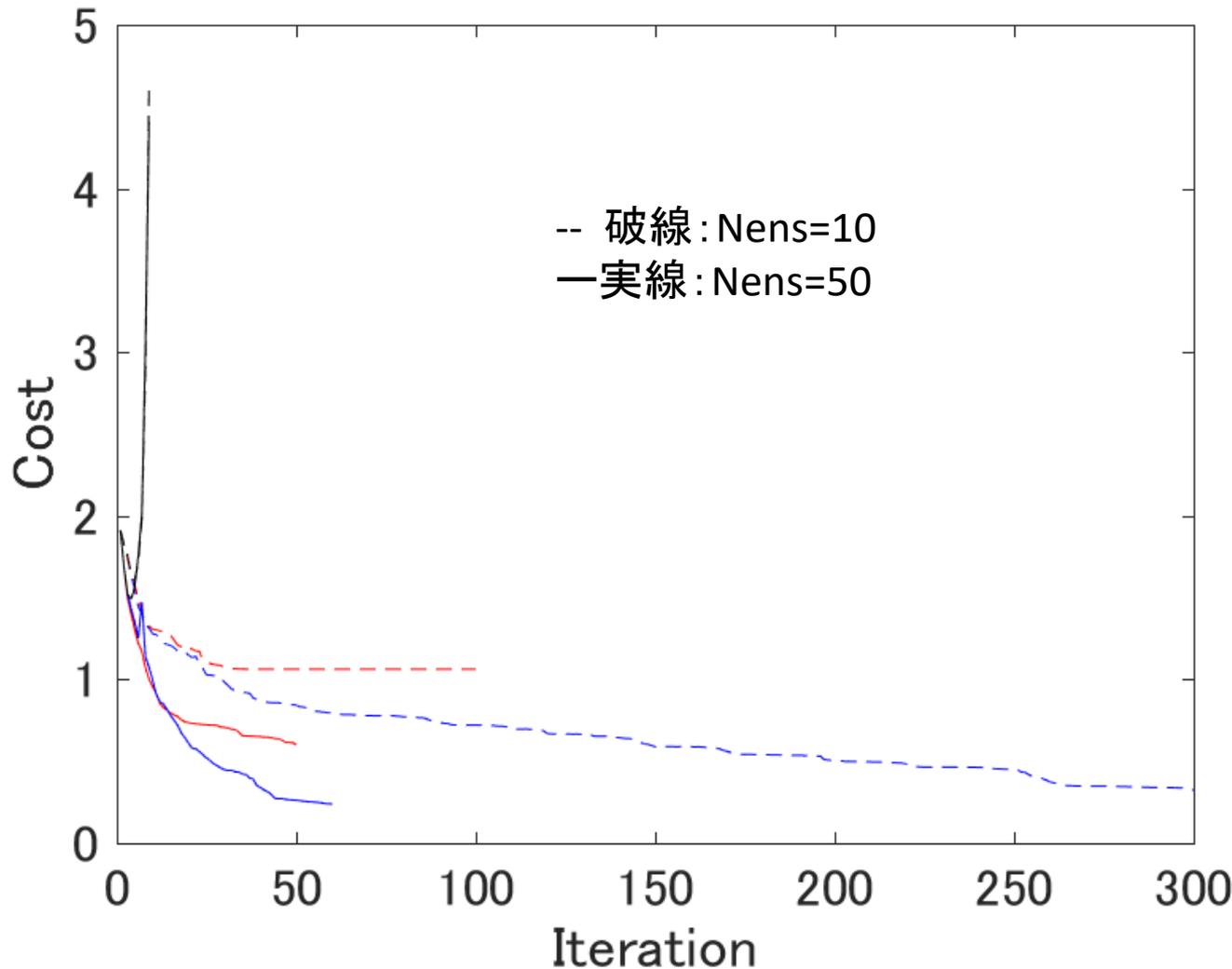
- 一定の範囲内において、解析値は真値とよく一致
- 推定可能範囲は、分散関係による群速度によって決まる
 - 時系列の長さが $N T_p$ であった場合、推定可能範囲はおよそ $N/2 \lambda_p$
- 正則化によって、境界付近は減衰される
 - 特に高波数成分
 - 周期境界条件の影響を緩和

並列化とスタッキングの効果 ($\lambda=0.005$)

赤: $e_{TOL} = 0$ (常にスタックしない)

青: $e_{TOL} = 0.2$

黒: $e_{TOL} = \infty$ (常にすべてのアンサンブルをスタックする)



- e_{TOL} が大きいほどスタックされる摂動が多くなり、収束が早い但不安定になる
- アンサンブル数を増やすことによってイタレーションを減らせる (並列化)
- 初期値の変化 s^n が小さいときに摂動がスタックされ、 s^n が大きいときに精度の悪い摂動が消去される。(スタックされた摂動の数がノコギリ状に変化する理由)

以下の要素により、水位時系列からの波形再構成が可能であり、推定を並列化できることを示した

- ① HOSMアンサンブル計算による4次元変分法
- ② 非線形スピニアップによる力学的整合性の確保
- ③ 事前予測パワースペクトルによる正則化、安定性向上
- ④ ミスフィットのパワースペクトルから摂動を選択
- ⑤ 過去のイタレーションで得られた摂動の近似精度の確認と、再利用(スタッキング)

今後の課題

- 多方向のケースについて、より広い領域設定の中でインバージョンを行う
- フリーク波再構成に適した観測システムを提案する