



データ同化～理学での研究・教育

坂上貴之（さかじょうたかし）
京都大学大学院理学研究科

自己紹介



所属 京都大学大学院 理学研究科 数学教室

学位 1999 京都大学 博士(理学)

職歴

1998~2003: 名古屋大学大学院 多元数理科学研究科, 助教

2003~2009: 北海道大学大学院 理学研究院数学専攻, 准教授

2009~2013: 北海道大学大学院 理学研究院数学専攻, 教授

2013~ 現在: 京都大学大学院 理学研究院数学教室, 教授

専門分野 (応用数学, 数理解体力学)

- ▷ 渦力学 (Vortex dynamics)
- ▷ 多体系の数値計算 (Fast multipole method, tree-code)
- ▷ 位相流体力学 (Topological fluid mechanics)
- ▷ 乱流理論の数理科学 (Mathematical theory for fluid turbulence)
- ▷ Interdisciplinary Mathematical Sciences (数理気象学, Math. Clinic)

データ同化で論文を書いたこと**まだ**ありません.....

しかし, データ同化は京大理学の研究・教育の双方で**今後重要な位置づけ**にあります.

近代科学（黎明期～20世紀前半）



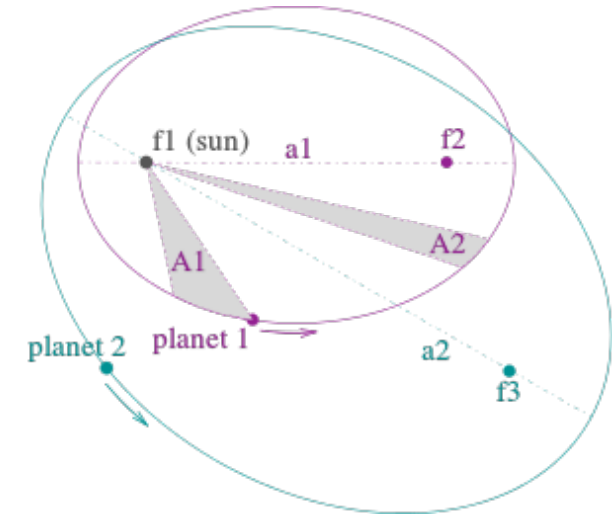
ティコ・ブラーエ



天体観測



ヨハネス・ケプラー



楕円軌道の発見

観測・実験

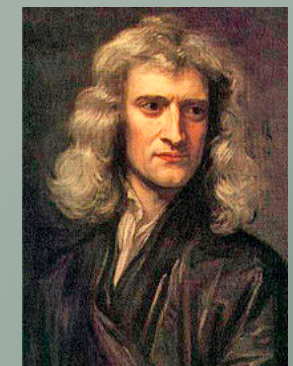
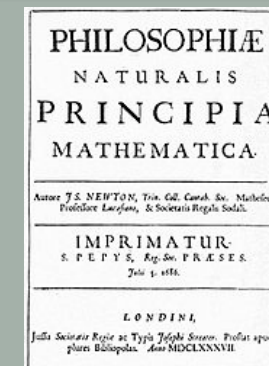


自然現象の理解

理論

理論予測

数理科学・統計科学
数量の記述言語
諸量の関係の記述として発展



観測データと理論モデル（理学研究の両輪）

写真・図はWikipediaより

理学研究の発展（計算機の出現）

計算機

- ・理論構築の思考実験
- ・計算機を動かす理論

- ・データ処理

自然現象の理解

理論

実験・観測



ENIAC



Main Frame (IBM system z9)

“定量的”な予測



飛行機的设计



数値天気予報

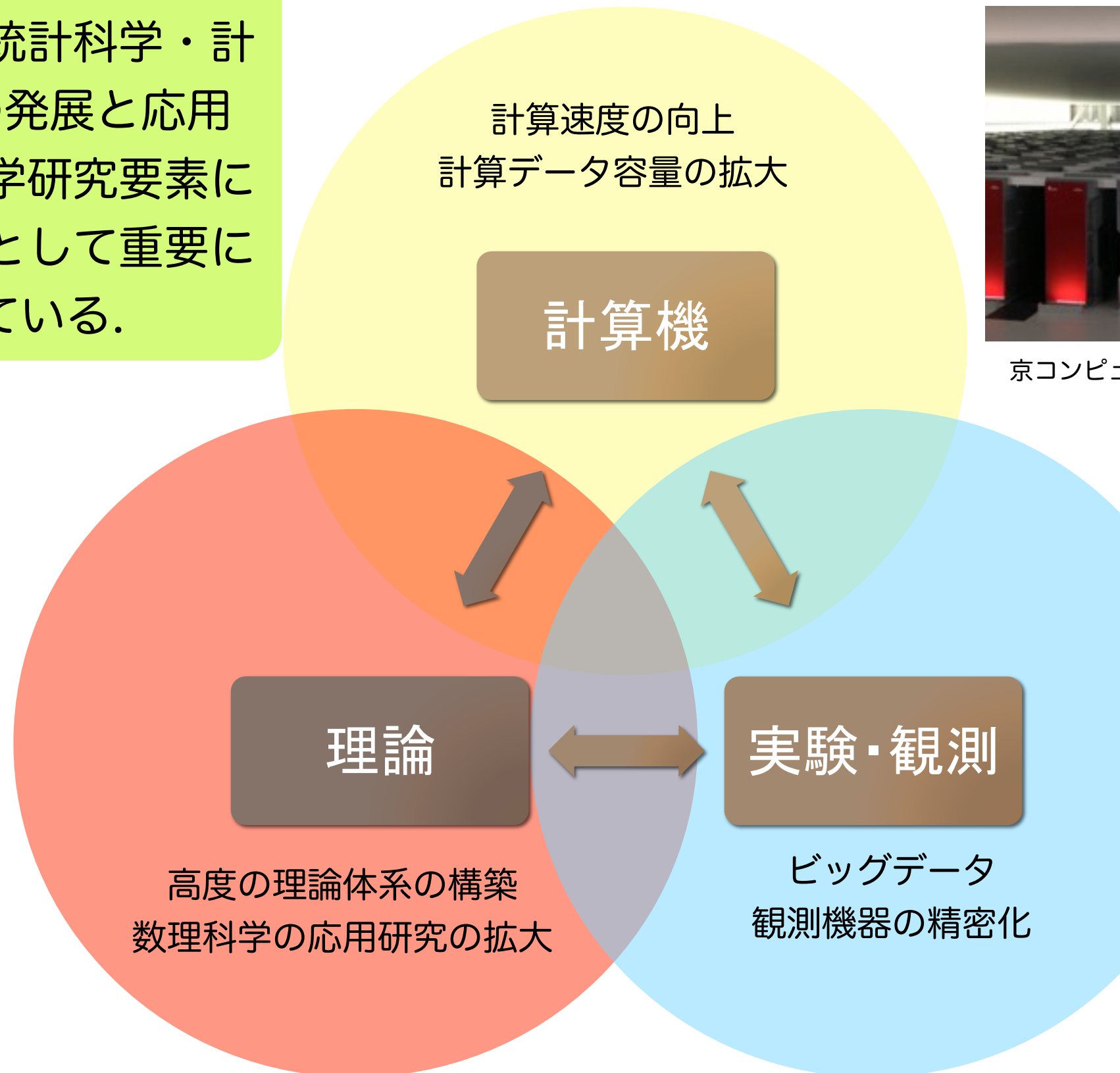
数理科学・統計科学・計算機科学
数量の記述言語・諸量の関係の記述
論理記述の体系

写真・図はWikipediaより

現代の理学研究（質・量の拡大）

“数学化”する世界

数理学・統計科学・計算機科学の発展と応用
すべての理学研究要素に関わる分野として重要になっている。



京コンピュータ（理研AICS）



気象衛星ひまわり8号
（NICT HPより）

データ同化：新しい理学融合分野

- ・精緻な理論の進歩（数理モデル）
- ・精密な観測による膨大なデータ
- ・高速，大容量の計算機性能

データ同化

これらの3つの分野を融合して生まれうる
観測・実験データと理論モデルを両輪とする新しい理学研究の1つあり方
➡ よりよい「定量的予測」を目指して

私たちの取り組みをご紹介します

- ▶ 理学研究・教育への波及
- ▶ 数理科学との関係

理論

実験・観測

理学教育：MACS 教育プログラム

MACS=**MA**thematics-based **C**reation of **S**cience

京都大学大学院理学研究科が推進する教育プログラム
ねらい

➡ 数理を基盤として理学5分野（数学・物理学・化学・生命科学・地球物理学）を横断する融合研究を推進し、
狙ってもできない新たな学問分野の自発的創出を促す

➡ 分野横断的課題の発見と解決に**学際的な視点から取り組める 優れた若手研究者や科学人材を育成**するための教育を行うことを目指しています

HP： “MACS教育プログラム” で検索

なぜ京大でMACSなのか？

背景① 基礎科学は**科学技術の根幹を担う重要な知的インフラ**である

近年、人々の関心が応用開発型研究に偏る

目の前の課題の直接的解答が手早く求められる傾向がある

専門分野の細分化;狭い研究領域に閉じこもる研究者も増えている

このままでは、これまで科学が切り拓いてきた、人類に幸福と進歩をもたらすような**全く新しい学問は生まれ出ない。**

それを担う若い研究者も育たない（のではないか？）

背景② 理論・実験・観測・計算・データ解析などの研究方法を統合し、協同・一体化して推進する研究や、そのための場の必要性が高まっている

背景③ 京大理学部伝統:「ゆるやかな専門化」「理学一学科」 学部入試から卒業まで5分野を区別しない教育を行っている

どうやって実現するのか？

方法① 「数理」の深化と水平展開

- ・ 数学・数理科学は、自然科学を記述する言語として理学研究の根幹を支えてきた
- ・ 暗号,ビッグデータ, AIなど最新の数理科学の応用が社会の変革を促す起爆剤に
- ・ 数理の特質である抽象性・普遍性に基づく幅広い「水平展開力」が期待される
- ・ 理学諸分野が数理と邂逅して, 思ってもみない分野が生まれるかもしれない

方法② 「スタディグループ」

- ・ 理学の複数分野を横断する様々なテーマ, 自由な研究スタイルを持つグループ
- ・ 複数分野の教員の研究成果や関心をタネにし, そこに数理を持ち込んでテーマを設定 それに興味と意欲のある学生が参加し互いに「学び合い, 教え合う」
- ・ 自由でゆるやかな教育と研究の場から「新たな学問分野の自発的創出」を促す. 同時に学際的な視点から研究に取り組む優れた若手研究者が育成される.

数理を軸に従来の枠を超える

👉 データ同化の教育を進めるのに最適

スタディグループ「データ同化の数理と応用」

参加教員：坂上貴之（数学・数理解析学専攻）・三好建正（理化学研究所）

余田成男（地球惑星科学専攻）

平成28年度前期活動：

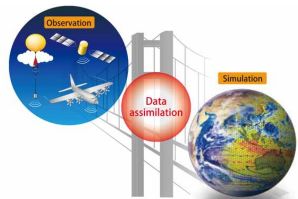
- ① 三好建正チームリーダによる連続講義「データ同化」（毎週火曜4限目）
・・・実践的なデータ同化の理論と応用を学びます（学生25名参加）
- ② 坂上・三好による修士学生の輪講（毎週火曜5限目）
・・・ストロガッツ（田中・中尾・千葉訳）「非線形ダイナミクスとカオス」
（修士学生6名（物理・宇宙物理学専攻，地球惑星科学専攻）参加）

数理科学特別講義 データ同化

2016年4/12(火)より
毎週火曜日4限(14:45~16:15)
京大大学理学研究科6号館207号室

この講義では、データ同化の理論と応用を学び、実際の問題に適用するために必要な実践的な基礎技術を習得することを目指す。データ同化は、数値計算によるシミュレーションと実測データとをつなぐ統計数理の分野である。シミュレーションと現実世界を同期させるカオス同期の問題としても知られるほか、限られたデータ（結果）から原因を探る逆問題とも関連が深い。

データ同化は学際科学であり、力学系、決定論のカオス、確率過程、実測データ、統計数理、最適制御、計算科学など、幅広い分野の総合理解に基づく。数値天気予報ではシミュレーションモデルと同様な根源的役割を果たすほか、様々な分野への応用可能性が広がっている。



講師：
三好 建正
Takemasa MIYOSHI
理化学研究所
計算科学研究機構
データ同化研究チーム
チームリーダー

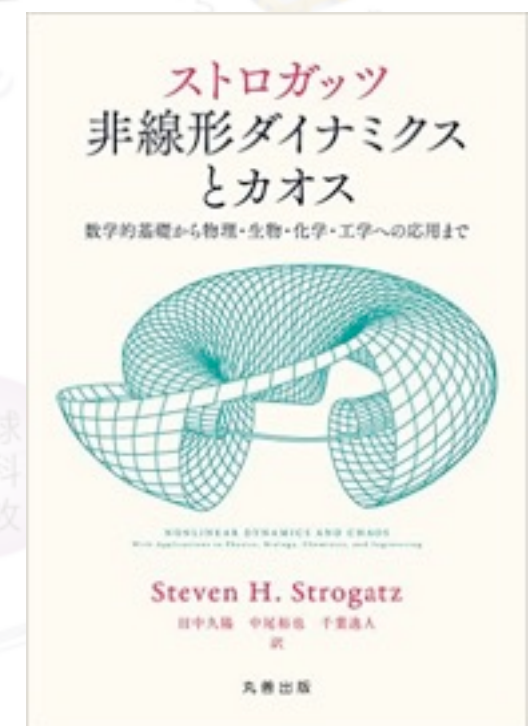
本講義は理学研究科が推進する MACS プログラムの一環として、この講義に引き続いてデータ同化を中心として分野横断型の理学研究を推進したい学生向けのセミナーと連動する形で開講されますので、興味のある人は講義とセミナーを受講してください。
詳細は、理学研究科・坂上貴之 (sakajo@math.kyoto-u.ac.jp) までお問い合わせください。

三好先生集中講義案内



三好先生集中講義風景

学生グループによるプレゼンが行われています。学部2回生から大学院修士2年まで、専門もばらばら、学部も理学・経済・工学などから出席しています。



今後の展望とMath Clinic

前期の成果を活かして、後期はさらに発展的に....

① 修士学生による輪講を継続

E. Kalnay 「Atmospheric Modeling, Data Assimilation and Predictability」

② 学生による実践的なデータ同化課題への取り組みも試みたい.

来年度以後も

- ・ データ同化の講義を継続.
- ・ データ同化を使って、自身の修士研究に取り組む学生が出てくることを期待
- ・ 博士課程進学で本研究テーマをとりあげる修士学生が自然に育つことを期待
- ・ データ同化を活かした研究キャリア（理研リサーチアソシエイト制度の利用，企業のデータ同化研究への展開など）

MACSプロジェクト「Math. Clinic」開設

- ・ 諸科学における数理科学による諸分野連携と横断を促すプロジェクト
- ・ 諸分野からの数学上の質問を受け付けて「処方箋」を提示
- ・ 「問題を数学で解決できないか？」 「この数学で何か問題が解決できないか？」
- ・ クリニック＝気軽に相談できるコンサルタントを目指す．（質問3件，企業コンサル2件）

数理科学研究：“数理気象学グループ”



- 平成20年～“数理気象学”MaeTグループの形成
- ・ 数理科学と気象学の包括的（若手）研究連携
 - ・ 坂上（北大）三好（メリーランド大）参加者
 - ・ データ同化と応用数学の連携の可能性を模索

坂上が京大に移動．三好が理研に研究室を構える

“理研・京大合同データ同化研究会”発足

理研・京大合同データ同化研究会

目的 理研AICS・データ同化研究チームと京大数学・坂上研究室との間の数学応用連携を実質的なものとして深める。

方法 それぞれの研究室の活動を交互に紹介し、データ同化に関する数理と応用の議論を深めて、参加者の意識共有を図る。

経過 理研側から数理科学上の問題提起。それに京大側が応えるというスタイル。これまでに5回実施。(6回目は2016年9月14日に予定)



第1回 2013年8月19日@理研AICS



第4回 2015年3月26日@京大数学

活動報告：提起された問題を例に

提起された問題：

マルチモデルアンサンブルの動的推定

数理学の問題：

三次元乱流ベクトル場の確率過程論

H. Nawa, T. Matsumoto, T.S-. 2016



最近の数理学の研究から，非ガウス・非線形のデータ
同化の方法を提案する

中野直人博士（さがけ・北海道大学）との共同研究

以下...この取り組みについて報告します.

専門的な話題が含まれますがご容赦下さい

乱流の数学理論から

コルモゴロフの乱流理論 (1941,62)

仮定1: 粘性ゼロ極限で乱流のエネルギー散逸率は正值に収束する

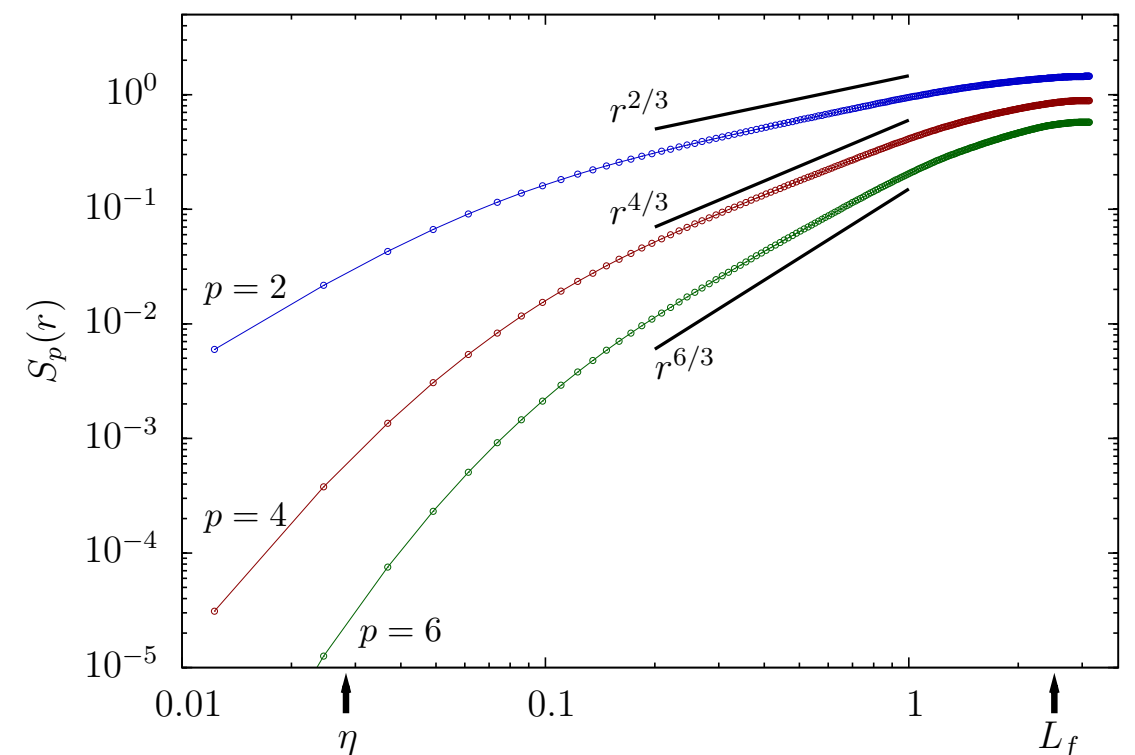
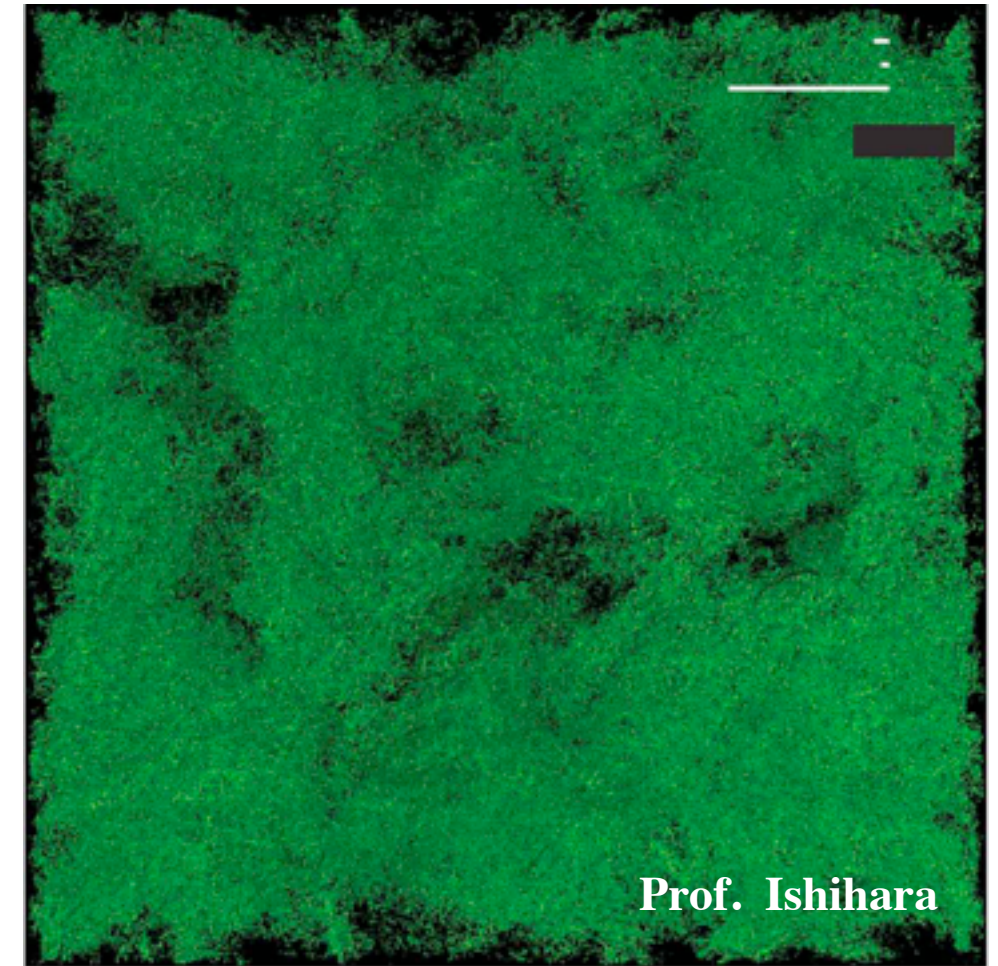
$$\langle \epsilon \rangle := \liminf_{\nu \rightarrow 0} \nu \|\nabla u\|^2 > 0$$

仮定2: 流れの“自己相似性”

結論: 流れ場のp次モーメントの統計則

$$\Delta_r u(t, \mathbf{x}) = (u(t, \mathbf{x} + \mathbf{r}) - u(t, \mathbf{x})) \cdot \hat{\mathbf{r}}$$

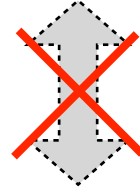
$$\langle \Delta_r u(t, \mathbf{x})^p \rangle = C \langle \epsilon \rangle^{p/3} |\mathbf{r}|^{p/3}$$



理論的パラドクス

コルモゴロフ理論のパラドクス

粘性ゼロ極限でエネルギーの散逸率はある正值に収束する。



流れの時間発展がNavier-Stokes方程式に従うとするならば、粘性ゼロ極限ではEuler方程式となり、その滑らかな解はエネルギーを保存する。つまりエネルギー散逸率はゼロ

このパラドクスを解消するために

- (1) 乱流流れ場はNavier-Stokes方程式には従わない
- (2) 粘性ゼロ極限のEuler方程式の解が滑らかでない。

オンサーガー予想(1949)

$$|u(t, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{r}) - u(t, \boldsymbol{x})| < C|\boldsymbol{r}|^\alpha, \quad \alpha > 1/3 \implies \|u(t, \cdot)\|^2 = \|u(0, \cdot)\|^2$$

- » ヘルダー指数 $1/3$ より大きい連続性を持つ流れはエネルギーを保存
- » ヘルダー指数 $1/3$ 以下の流れはエネルギーを散逸しうる。

乱流を無限次元“サイコロ”とみる

乱流 = 3次元ベクトル場からなる確率空間

$(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ is a mathematical triplet.

評価写像 (観測に対応)

$$\begin{array}{ccc} V_{x,t} : \Omega & \longrightarrow & T_x \mathbb{T}^3 \cong \mathbb{R}^3 \\ & \Downarrow & \Downarrow \\ & u & \longmapsto u(x, t) =: V_{x,t}(u). \end{array}$$

- $\Omega := C(\mathbb{T}^3 \times [0, T])$,
- $\mathfrak{B}$: the Borel sets of Ω ,
- P : probability measure on Ω .

アンサンブル平均

$$f \in C \cap L^\infty(\mathbb{R}^3)$$

$$\mathbb{E}[f(V_{x,t})] = \int_{\Omega} f(V_{x,t}(u)) P(\mathrm{d}u) = \int_{\mathbb{R}^3} f(v) P_{V_{x,t}}(\mathrm{d}v) = \int_{\mathbb{R}^3} f(v) p(v; x, t) \mathrm{d}v$$

疑問 1 : サンプル空間 Ω に属する速度場とは？

疑問 2 : このような速度場を生成する方程式は何か？

数学的目標 : 乱流速度場の集合で値をもつ確率測度 P を定めること

確率過程論の言葉で考える

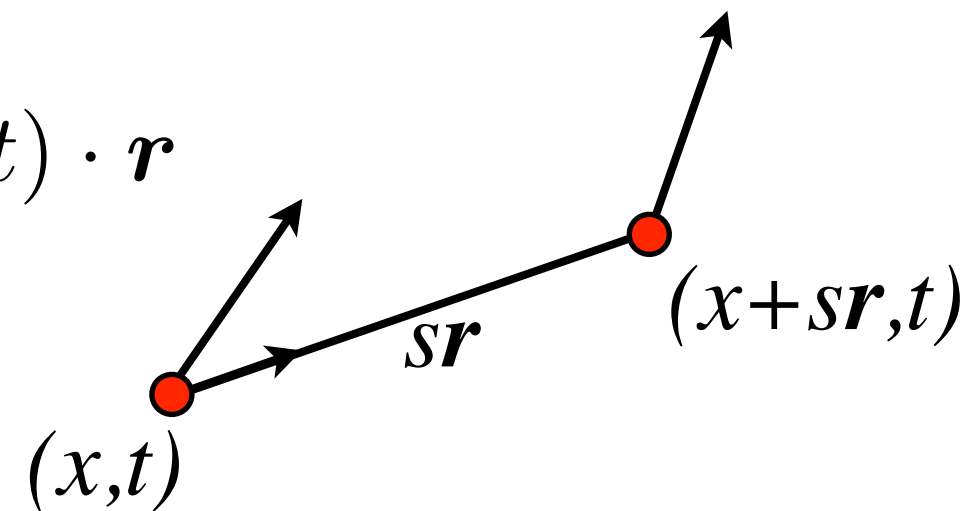
確率変数: 観測できるのは速度場

$$V_{x,\boldsymbol{r},t}(u) := u(x + \boldsymbol{r}, t) \quad \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3 : \text{a unit vector}$$

1パラメータの確率変数 (動径方向の速度差)

$$X_s^{x,\boldsymbol{r}}(u) := V_{x,s\boldsymbol{r},t}(u) \cdot \boldsymbol{r} = u(x + s\boldsymbol{r}, t) \cdot \boldsymbol{r}$$

s : 動径方向の距離 (パラメータ)



コルモゴロフの乱流則

$$\mathbb{E} \left[\left| X_{s+h}^{x,\boldsymbol{r}} - X_s^{x,\boldsymbol{r}} \right|^p \right] \asymp C(\langle \epsilon \rangle |h|)^{p/3} \quad \forall p \geq 3$$

これが任意の p で成立！

Kolmogorov-Centovの定理

Theorem 1 Suppose that a process $X = \{X_t \mid 0 \leq t \leq T\}$ on a probability space $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ satisfies the condition

$$\mathbb{E} [|X_t - X_s|^\alpha] \leq C |t - s|^{1+\beta}, \quad 0 \leq s, t \leq T, \quad \gg \text{law of ensemble average}$$

for some positive constants α, β and C . Then there exists a continuous modification $\tilde{X} = \{\tilde{X}_t \mid 0 \leq t \leq T\}$ of X , which is locally Hölder continuous with exponent γ for every $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$, i.e.

$$P \left[\omega \mid \sup_{\substack{0 < t - s < h(\omega) \\ s, t \in [0, T]}} \frac{|\tilde{X}_t(\omega) - \tilde{X}_s(\omega)|}{|t - s|^\gamma} \leq \delta \right] = 1, \quad \gg \text{Hölder continuity of ensembles}$$

where $h(\omega)$ is an almost surely positive random variable and $\delta > 0$ is an appropriate constant.

- ➡ アンサンブル平均のヘルダー指数から、各サンプルのヘルダー指数を見積もる.
- ➡ どのような確率過程に対しても成立している.

乱流の示すヘルダー指数

コルモゴロフ則にこの定理を適用すると

$$\mathbb{E} \left[|X_{s+h}^{x,r} - X_s^{x,r}|^p \right] \asymp C(\langle \epsilon \rangle |h|)^{p/3} \quad \forall p \geq 3$$

$$| [u(x + (s+h)r, t) - u(x + sr, t)] \cdot r | \leq C|h|^\alpha \quad 0 < \alpha \leq \frac{1}{3}$$

Proposition. For the stochastic process satisfying the Kolmogorov's laws, there exists a continuous modification $\tilde{X}_{\hat{r},s}^{x,t} = \left\{ \tilde{X}_{\hat{r},s}^{x,t} \mid 0 \leq s \leq L \right\}$ of $X_{\hat{r},s}^{x,t}$, which is locally Hölder continuous with any exponent $\gamma \in (0, 1/3)$.

- ☞ コルモゴロフ則からオンサーガー予想は（その流れ場を生成する方程式とは関係なく）自動的に導出される.
- ☞ ブラウン運動とはヘルダー指数の点で確率過程として異なっている.
cf. ブラウン運動では $0 < \alpha \leq 1/2$ となっている.

エネルギー散逸率再考

コルモゴロフの定義

$$\langle \epsilon \rangle := \liminf_{\nu \rightarrow 0} \nu \|\nabla u\|^2 > 0$$

この定義では、粘性係数という物理量が含まれている。確率過程としての乱流は流れ場に対してのみ定義される量で議論すべき。

Karman-Howarth-Moninの関係式:

$$\begin{aligned} \langle \epsilon \rangle &:= -\frac{1}{4} \operatorname{div}_{\xi} \langle |\delta_{\xi} u|^2 \delta_{\xi} u \rangle \big|_{\xi=0} \\ &= -\frac{1}{4} \operatorname{div}_{\xi} \mathbb{E} \left(|\Delta_{\xi} V_{x,t}[u]|^2 \Delta_{\xi} V_{x,t}[u] \right) \big|_{\xi=0} \end{aligned}$$

$$\delta_{\xi} u := u(x + \xi, t) - u(x, t) = V_{x+\xi,t}[u] - V_{x,t}[u] =: \Delta_{\xi} V_{x,t}[u]$$

👉 この定義は速度場だけで定義できる。

⇒ これを **“我々” のエネルギー散逸率** として採用

👉 乱流ベクトル場は微分可能ではない（1/3ヘルダー連続）だが定義には微分が含まれる。 ⇒ どのようにしてこの量を数学的に取り出すか？

2つの数学的取り出し方

第一の方法：超関数の意味で

$$\langle \epsilon \rangle := \frac{1}{4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3} \langle |\delta_\xi u|^2 \delta_\xi u \rangle \cdot \nabla \varphi_\varepsilon(\xi) \mathcal{L}^3(d\xi)$$

$$\mathcal{D}(\mathbb{T}^3) \ni \varphi_\varepsilon \rightarrow \delta_0 \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{T}^3) \text{ as } \varepsilon \downarrow 0$$

第二の方法：球面平均の意味で

$$\langle \epsilon \rangle := -\frac{1}{4} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{L}^3(B(0; r))} \int_{B(0; r)} \operatorname{div} \langle |\delta_\xi u|^2 \delta_\xi u \rangle \mathcal{L}^3(d\xi)$$

$$= -\frac{1}{4} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{L}^3(B(0; r))} \int_{|\xi|=r} \langle |\delta_\xi u|^2 \delta_\xi u \rangle \cdot \frac{\xi}{|\xi|} \mathcal{H}^2(d\xi)$$

$$= -\frac{3}{4} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi r} \int_{|\omega|=1} \langle |\delta_{r\omega} u|^2 \delta_{r\omega} u \rangle \cdot \omega \mathcal{H}^2(d\omega).$$

乱流場を生成する方程式について

この量は乱流ベクトル場について同じ量(well-defined)であるべき。
これが乱流場を生成する方程式を考える1つの指針になる。

$$\mathbb{E} \left(\frac{1}{4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3} |\delta_\xi u|^2 \delta_\xi u \cdot \nabla \varphi_\varepsilon(\xi) \mathcal{L}^3(d\xi) \right) \\ = \mathbb{E} \left(-\frac{3}{4} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi r} \int_{|\omega|=1} |\delta_{r\omega} u|^2 \delta_{r\omega} u \cdot \omega \mathcal{H}^2(d\omega) \right).$$

Q：この性質を満たす流体の方程式はなにか？

Duchon, J. and Robert, R., *Inertial energy dissipation for weak solutions of incompressible Euler and Navier-Stokes equations*, Nonlinearity vol 13 (2000) 249-255

Eyink, G. L., *Local 4/5-law and energy dissipation anomaly in turbulence*, Nonlinearity vol 21 (2003) 1233-1252

流体方程式 = 乱流場を生成する無限次元“サイコロ”

👉 オイラー方程式の**散逸的弱解**がサンプル空間の元であることを示唆



(離散) 確率分布に対する数理

k 個の値の(離散)集合 $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$

各値が出る確率分布 (これが私達の知りたい確率分布)

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k \\ p(a_1) & p(a_2) & \dots & p(a_k) \end{pmatrix} \quad \sum_{i=1}^N p(a_i) = 1$$

$N(>>1)$ 回の“観測”で得られる事象の集合 (各観測は独立・同分布を仮定)

$$\Omega := \mathcal{A}^N = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N) \mid \omega_j \in \mathcal{A}, j = 1, 2, \dots, N\}$$

$$N_i(\omega) := (\omega \text{ の中に値 } a_i \text{ が含まれる回数})$$

この観測に対する確率(これにより確率空間が定義される)

$$P(S) := \sum_{\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N) \in S} \prod_{i=1}^N p(\omega_i), \quad S \subset \Omega$$

$$\text{エントロピー} \quad H := - \sum_{i=1}^k p(a_i) \ln p(a_i)$$

シャノン・マクミランの定理

Theorem 1 (Shannon - McMillan I). 任意の正数 α, β に対して, ある自然数 $N(\alpha, \beta)$ が見つかって, $N \geq N(\alpha, \beta)$ であれば, Ω の部分集合 Ω_N が存在して, 次を満たす.

1. $P(\Omega_N) > 1 - \alpha$,
2. 任意の $\omega \in \Omega_N$ に対して

$$e^{-N(H+\beta)} \leq P(\{\omega\}) \leq e^{-N(H-\beta)},$$

3. Ω_N に属する事象 (events) の数 $\#\Omega_N$ は

$$e^{N(H-\beta)} \leq \#\Omega_N \leq e^{N(H+\beta)},$$

N 個の出力列の値の分布がほぼ元の値の確率分布に等しい事象の集合

$$\exists \delta \quad \Omega_N := \left\{ \omega \in \Omega \mid \left| \frac{N_i(\omega)}{N} - p_i \right| < \delta, \quad 1 \leq \forall i \leq k \right\}$$

この定理の主張：

- ① この集合はほぼ確率 1 で存在している (**シャノンコアの存在**)
- ② この集合の元は値の確率分布が定義する**エントロピーを最大化**する

平衡統計力学の“指針”

シャノンマクミランの定理=大数の法則

実際の確率分布がどうなっているかについては教えてくれない。

本当の確率分布を知るにはひたすら観測をするしかない。

一方、私達は観測をせずに、理論的にその“確率分布”を決めたい。

平衡統計力学の“指針”

シャノンマクミラン核を実現するのはエントロピー
を最大化する確率分布である

数学の問題とその解

$$\sum_{i=1}^N p(a_i) = 1 \quad \text{の制約の下で} \quad H := - \sum_{i=1}^N p(a_i) \ln p(a_i) \quad \text{を最大化せよ}$$

$$\langle E \rangle = \sum_{i=1}^N a_i p(a_i)$$

Gibbs測度

$$p_i = \frac{e^{-\beta a_i}}{\sum_{j=1}^N e^{-\beta a_j}}$$

乱流場＝“時空の”平衡統計とみる

仮定

- (1) ある時空領域 $[0,T] \times [-L,L] \times [-L,L] \times [-L,L]$ を十分細分して N 個の時空の
小時空間に分割し、各小時空間の内部での速度場は“乱流状態”にある
- (2) 各小時空間の中で私達はエネルギー散逸率を「観測」する。各観測は
独立でありその分布も同分布とする。各小時空間BOXは“サイコロ”
- (3) 乱流状態ではエネルギー散逸率の小時空間での平均がある正定数に
なっている。（コルモゴロフの仮定）

Shannon-McMillanの枠組み

値の集合 $\mathcal{A} = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_k\}$ 値に対する確率分布 $\begin{pmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_2 & \dots & \epsilon_k \\ p_1 & p_2 & \dots & p_k \end{pmatrix}$

観測によってえられるデータ列

$$\Omega := \mathcal{A}^N = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N | \omega_j \in \mathcal{A}, \quad j = 1, 2, \dots, N)\}$$

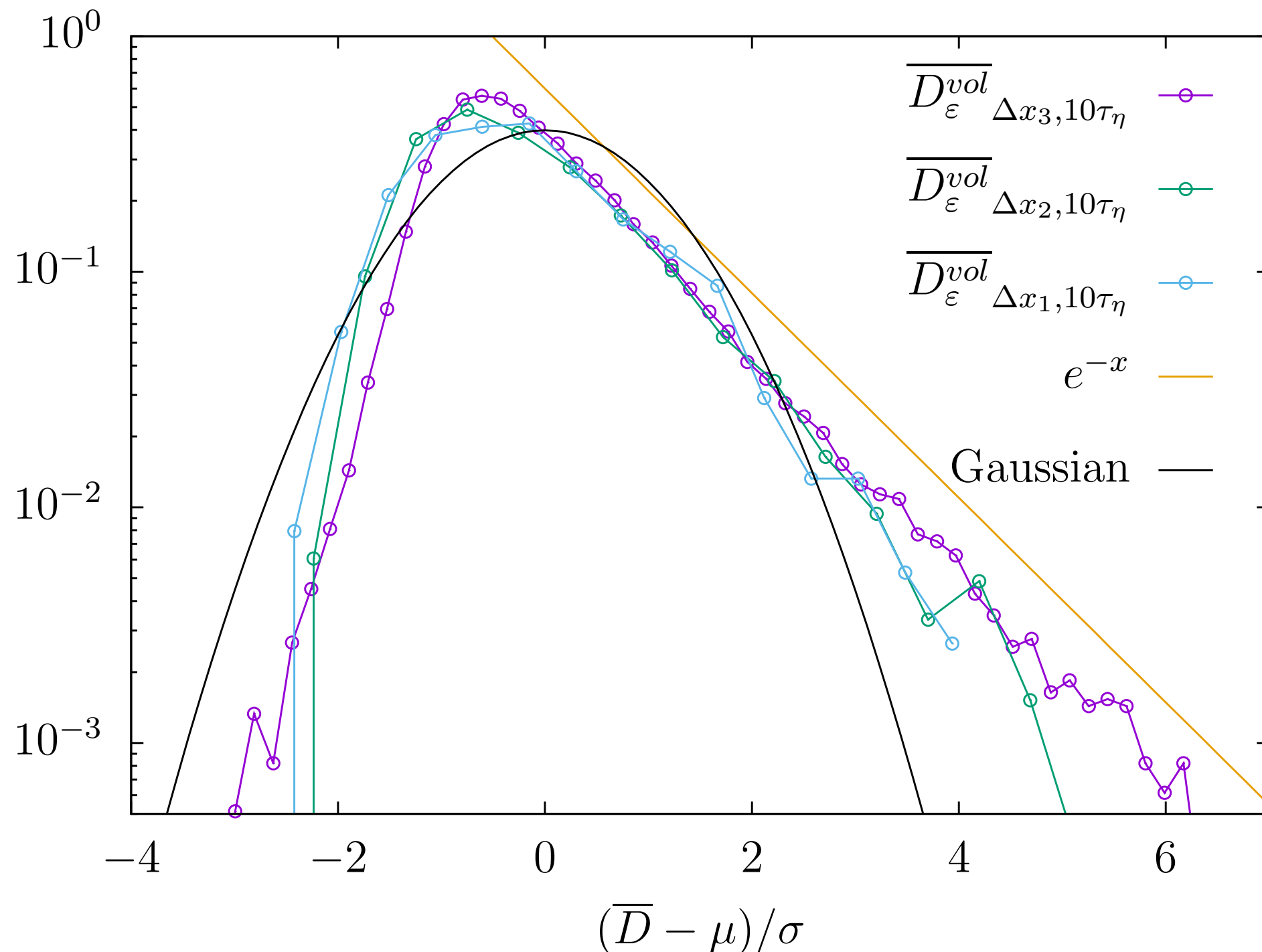
平衡統計力学の指針から

$$p_i = \frac{e^{-\beta \epsilon_i}}{\sum_{j=1}^N e^{-\beta \epsilon_j}}$$

もちろん実際の乱流は“無限個”のサイコロのギブス測度になるはず。（数学的な困難はここにある）

数値計算で確認

三次元Navier-Stokes方程式の数値計算結果：各小時間空間BOXでエネルギー散逸率を観測してその頻度分布を見る (Boxのサイズを変えて計算)



非線形・非ガウスデータ同化

データ同化：シミュレーションモデルと観測データを組み合わせて尤もらしい状態を推定する手法

状態空間モデル

$$x_t = f_t(x_{t-1}, \xi_t)$$

$$y_t = h_t(x_t, w_t)$$

- ➡ システムモデルや観測モデルによって同化手法は異なる
アンサンブルカルマンフィルタ：観測モデルは線型でノイズはガウス分布
- ➡ 応用範囲の広い同化手法は計算コストが大きい傾向
粒子フィルタ：高次元の場合は非常に大きな粒子数が必要。退化の問題もある

状態空間モデルによらない非線形・
非ガウスデータ同化手法の探索

提案手法

現在検討中のため公開は控えさせていただきます。

提案手法の特徴

1. 本手法は従来のデータ同化のアイデアの設定とは異なっている.
 - 👉 さらなるテストが必要
2. 観測に誤差がない. 平均値を観測値とするよう尤度を決定
 - 👉 統計料の推定が観測を「信じすぎる」
3. モデル群の初期値が新のモデルの初期値と同じとしている.
 - 👉 モデル群の初期値を真値中心のガウス分布でも大差はない.
4. 「勝ち組は勝ち組, 負け組は負け組」
履歴があると尤度推定がうまくいくことが観察されるが, 一度ずれが出るとそれが履歴として引き継がれ誤った尤度推定を算出する傾向がある.
 - 👉 適切な履歴の消去方法が必要
5. 今後の方向性:
 - 👉 もっと大きな次元のモデル(Lorenz 96)への適用.
 - 👉 履歴制御, ノイズのある観測などへの展開.