

火山噴火現象予測モデルの 数理デザイン

小屋口剛博
(東京大学地震研究所)

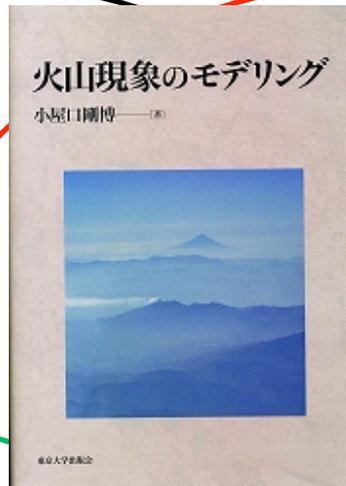
共同研究者: 小園誠史・K. Anderson・清杉孝司・松尾直弥・鈴木雄治郎

自己紹介を兼ねて：火山現象のモデリング

(小屋口2008: 東大出版会) ISBN 978-4-13-060750-6

保存則

(基礎方程式)



場に対する知識
(境界条件)

物に対する知識
(構成方程式)

10年前までの私の立場: 予測の手がかり = 順問題モデルの不変的数理構造

予測モデルの数理デザインとは(1/2)

データ同化の数理をまとめると...

$$\tilde{x}_t = \begin{pmatrix} x_t \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_t(x_{t-1}, v_t | \theta) \\ \theta \end{pmatrix}$$
$$y_t = h_t(x_t, w_t | \theta)$$

x_t

興味ある量

y_t

観測量

θ

モデルパラメータ
(初期条件を含む)

f_t

時間発展モデル

h_t

観測演算子

v_t

システムノイズ

w_t

観測ノイズ

現在の私の立場: 予測の手がかり = 順問題モデルと逆問題モデルの最適化

予測モデルの数理デザインとは(2/2)

順問題モデル拘束条件とする評価関数

$$J = \frac{1}{2}(\theta - \theta_b)^T B^{-1}(\theta - \theta_b) + \sum \frac{1}{2}(y - h(x; \theta))^T R^{-1}(y - h(x; \theta))$$

最小値を与えるパラメータ値 θ を探す逆問題.

当面の目標

物理モデルの性質が, $h(x; \theta)$ を介して

$$J \text{ あるいは } P(\theta|y) \propto e^{-J}$$

に対してどのような影響を与えるか, 可能な限り直感的・直接的に理解して問題を定式化する.

予測したい現象(例1)

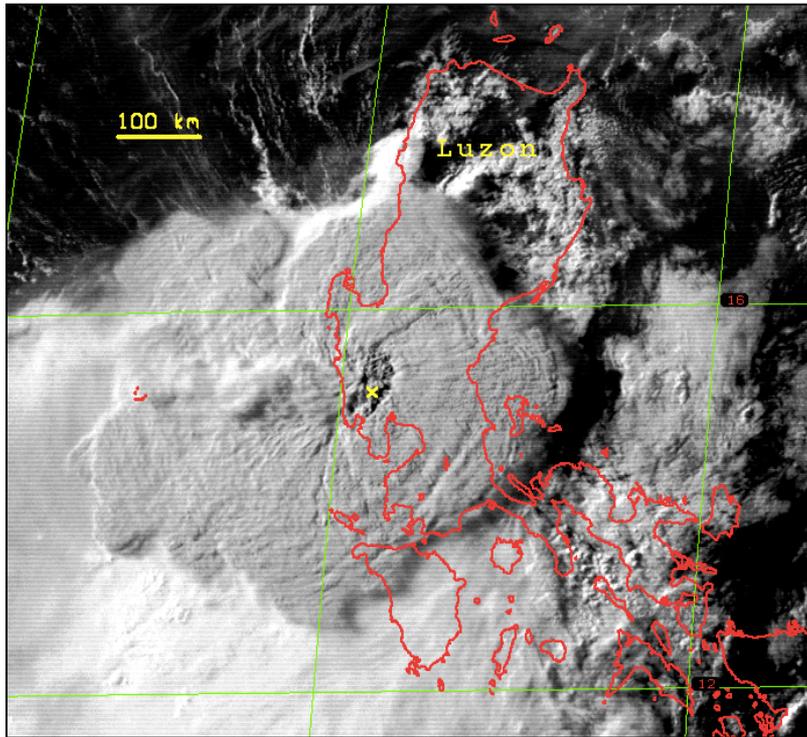
火山噴煙と航空機エンジン障害



2010 April 14th @エイヤフィヤトラヨークトル

噴煙のダイナミクスに関わる観測量

1991年ピナツボ噴火の例

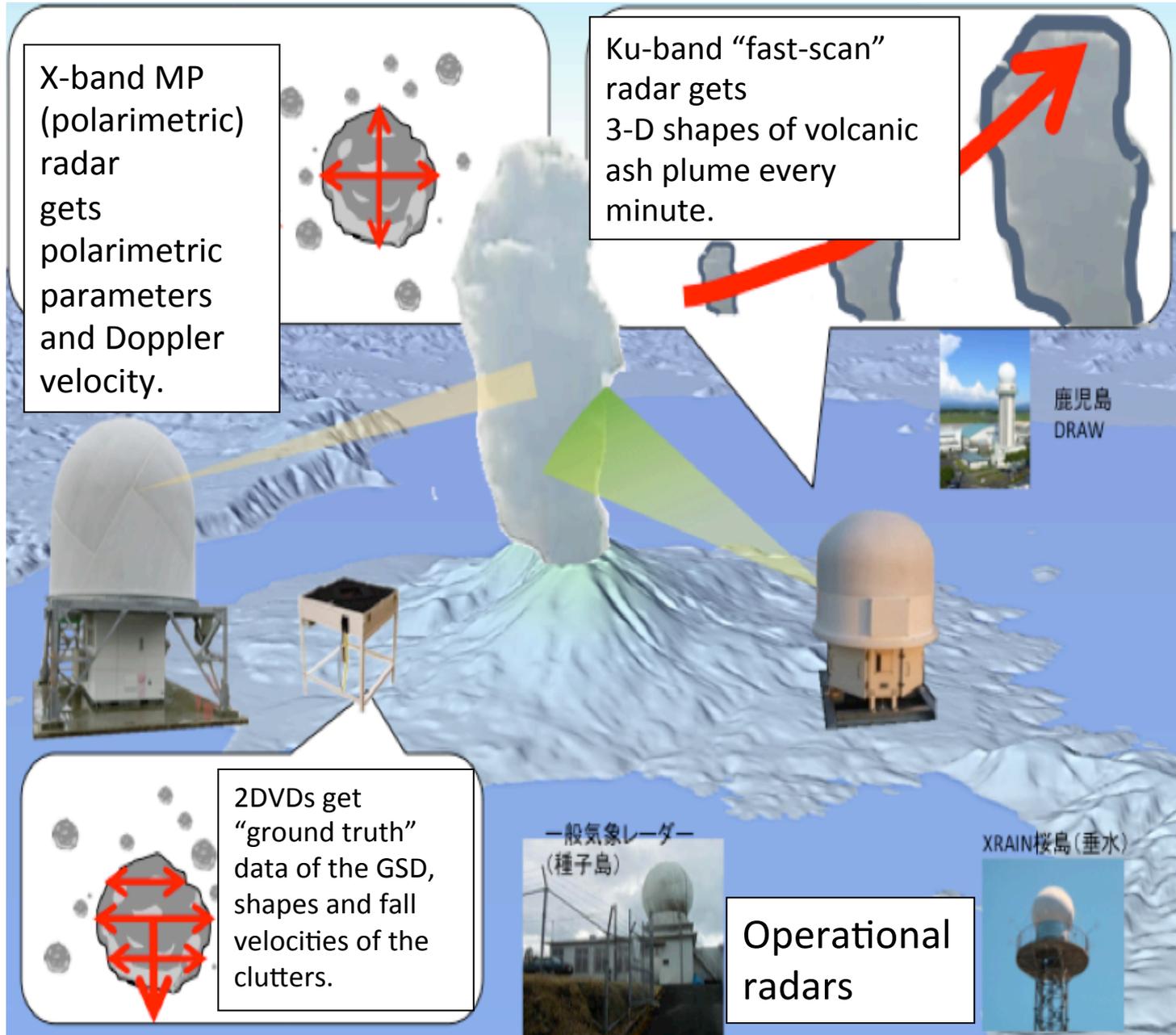


人工衛星画像



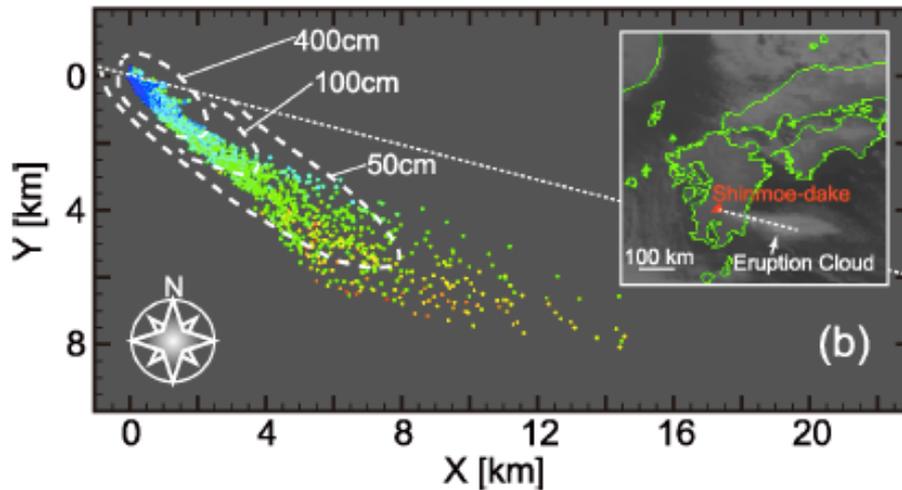
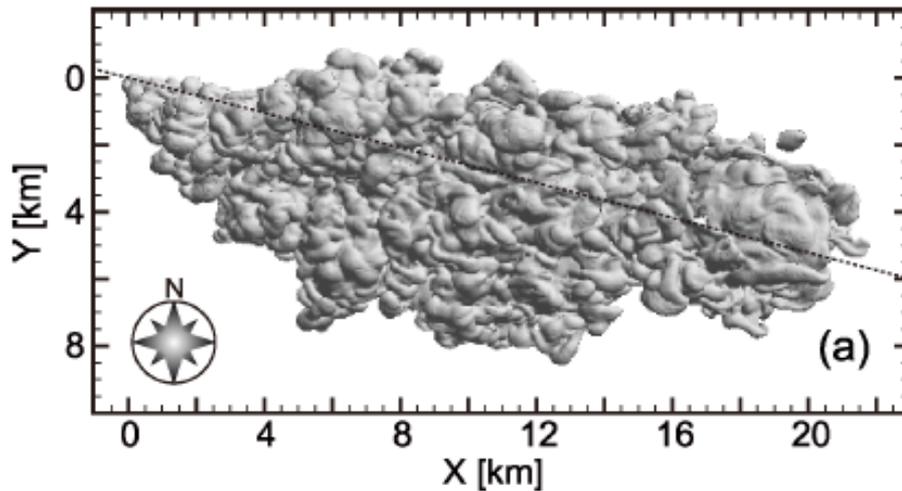
降下火砕堆積物

レーダーによる噴煙観測 (気象研 佐藤他のプロジェクト)



噴煙の順問題モデルの現状

(新燃岳2011年噴火の例)

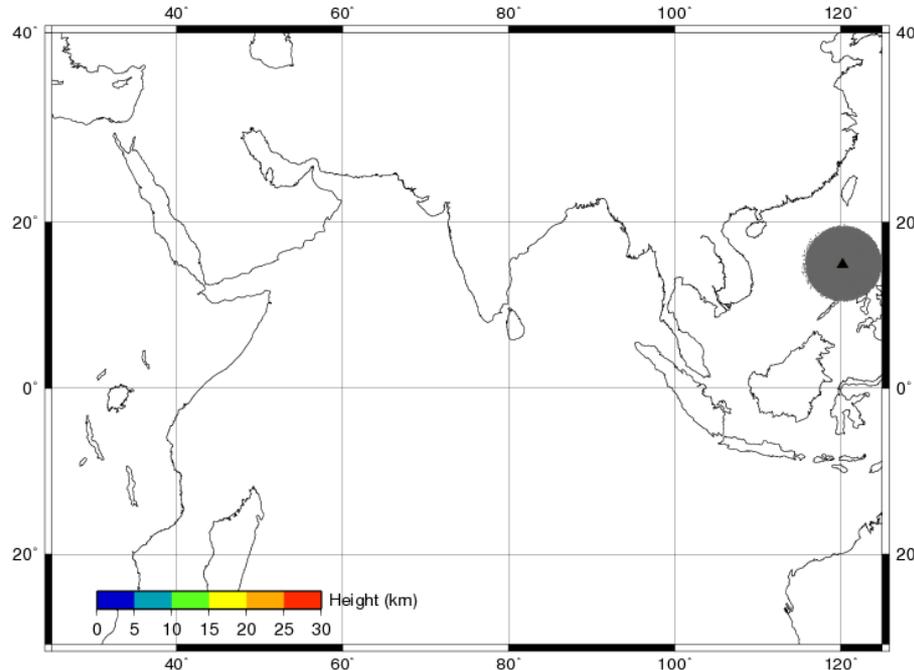


噴煙からの降下火砕物の
降下シミュレーションと
観測データによる比較検証

Suzuki and Koyaguchi (2013)

火山灰拡散の予測問題

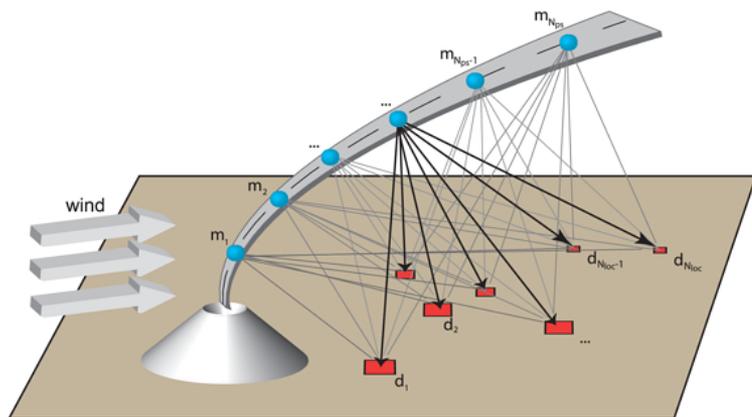
1991年ピナツボ噴火に対する
移流拡散モデルシミュレーション (Fero et al., 2009)



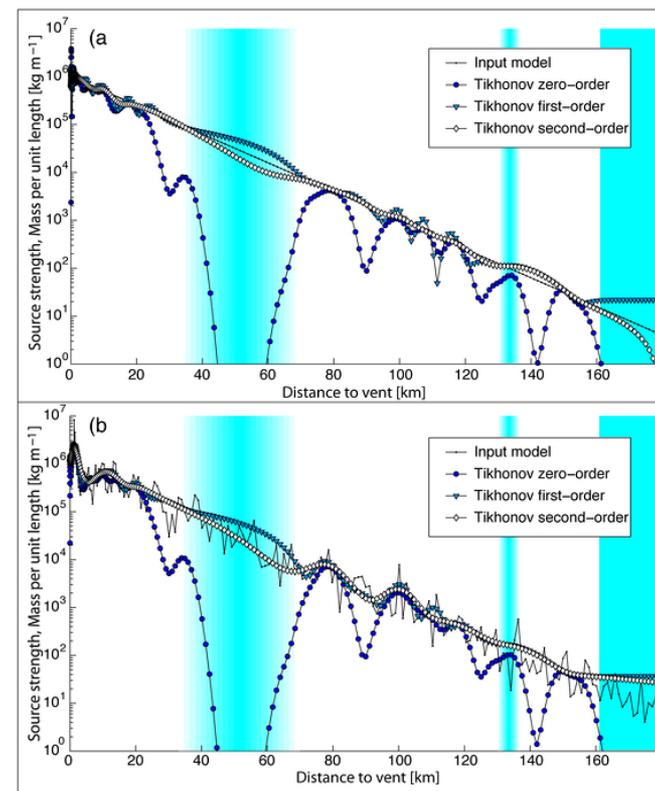
$$\frac{\partial c}{\partial t} + U \frac{\partial c}{\partial x} - S \frac{\partial c}{\partial z} - D_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - D_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - D_z \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} = Q$$

供給源のモデルパラメータを決定し、拡散プロセスを予測する問題になっている。

噴煙の逆問題モデルの現状



- 観測点の数 < 供給点の数の問題についてTikhonov正則化を用いて安定化 (Klawonn et al., 2013右図)
- 観測点の数 > 供給点の数の問題として定式化 (Mannen, 2014)



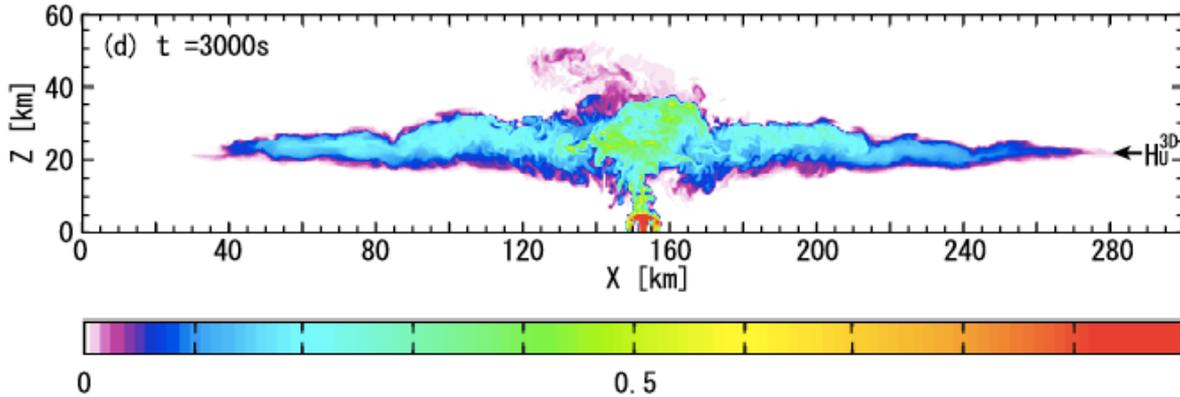
Klawonn et al. (2013)

- そもそもいくつかのパラメータが供給源の性質を決めているのか？
物理モデルの観点から考察する。

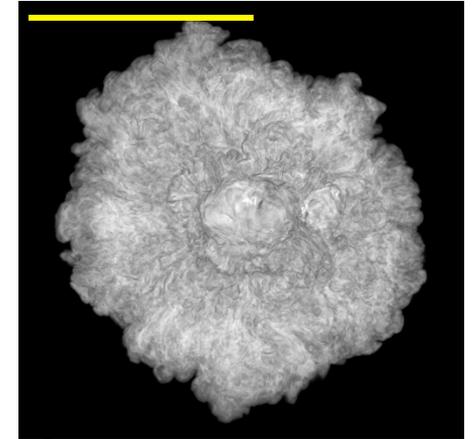
少なくとも大噴火の火山灰堆積過程の性質は極少数のパラメータで決まっている。

供給源の振る舞い

大規模噴煙モデルの数値計算結果



100 km



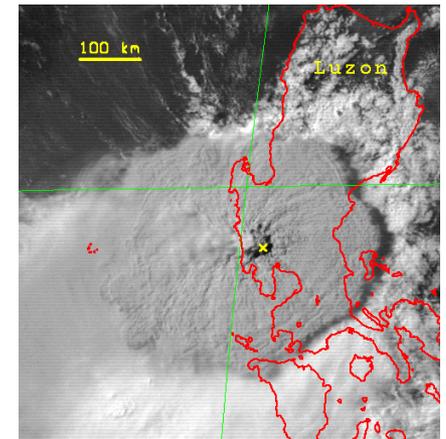
3次元シミュレーション

水平100kmに拡大する傘型噴煙の再現
最大サイズの計算

2040 x 2040 x 506 メッシュ 200node

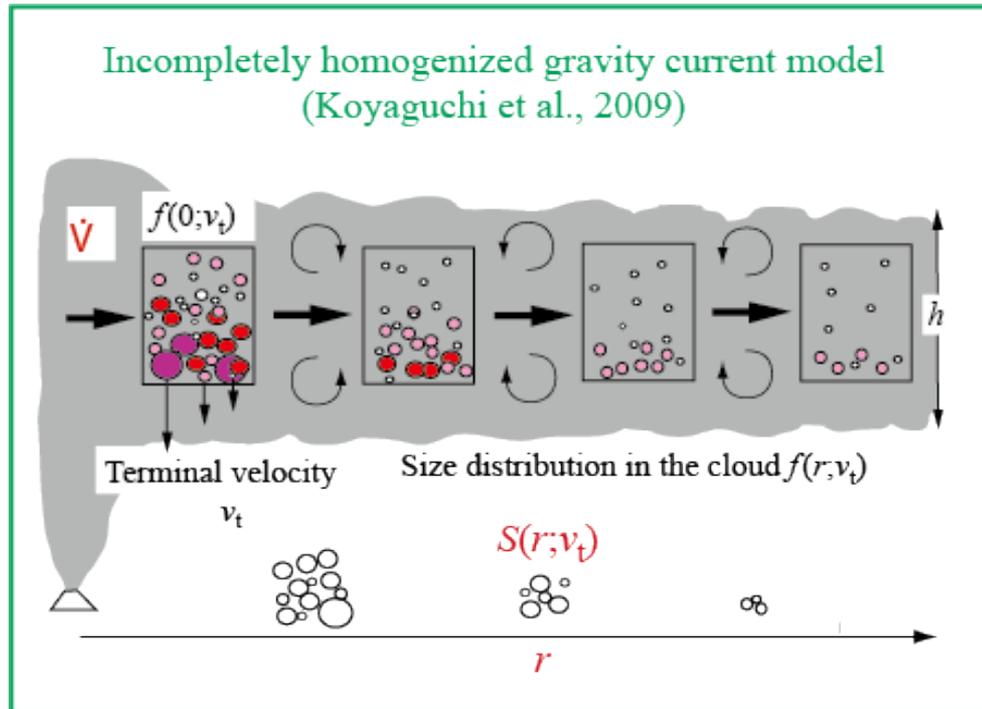
@地球シミュレータ

Suzuki and Koyaguchi (2009)



1991年ピナツボ火山噴煙の
衛星写真

供給源の性質を決めるパラメータ ピナツボ噴火の例 (1/2)

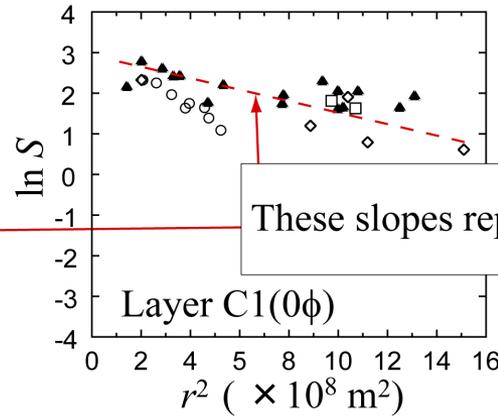
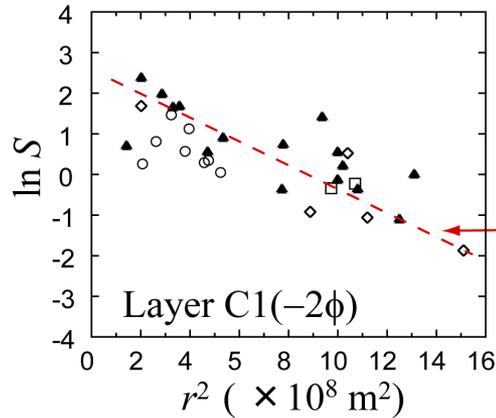


$$\ln S_i(r; v_{ti}) = -\frac{3\pi\kappa r^2 v_{ti}}{4\dot{V}} + \ln S_i(0; v_{ti})$$

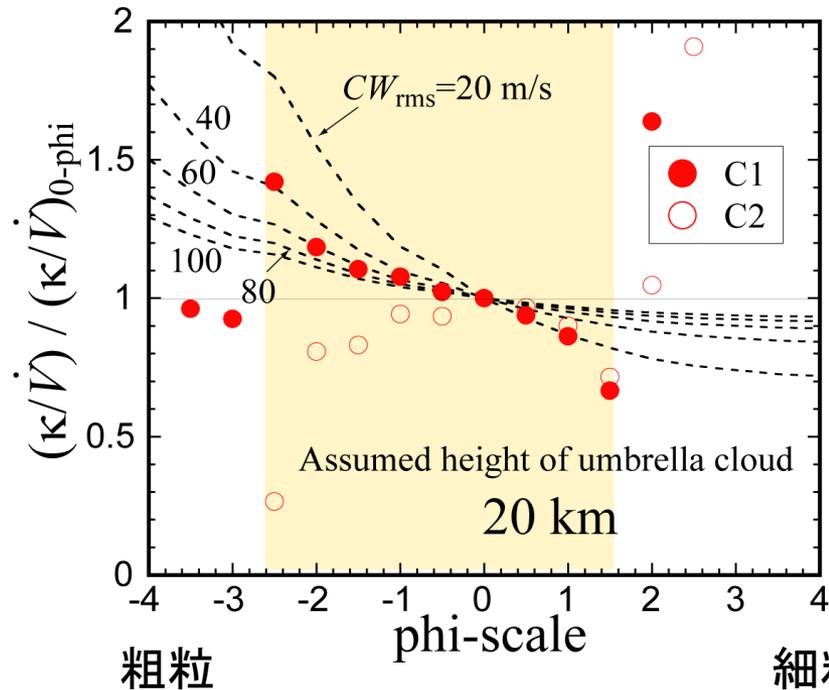
where $\kappa = \frac{v_{ti}/CW_{\text{rms}}}{1 - \exp[-v_{ti}/CW_{\text{rms}}]}$ with $C \sim 0.8$

供給源の性質を決めるパラメータ

ピナツボ噴火の例 (2/2)



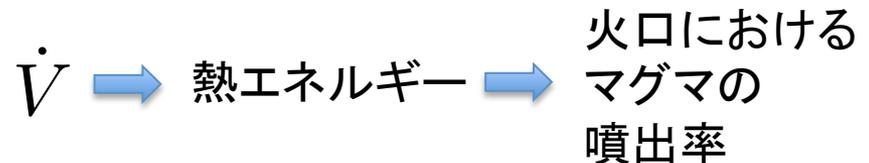
These slopes represent $-\frac{3\pi\kappa v_{ti}}{4\dot{V}}$



幅広い粒径で同一の κ/\dot{V} の値をもつような CW_{rms} が定まる。

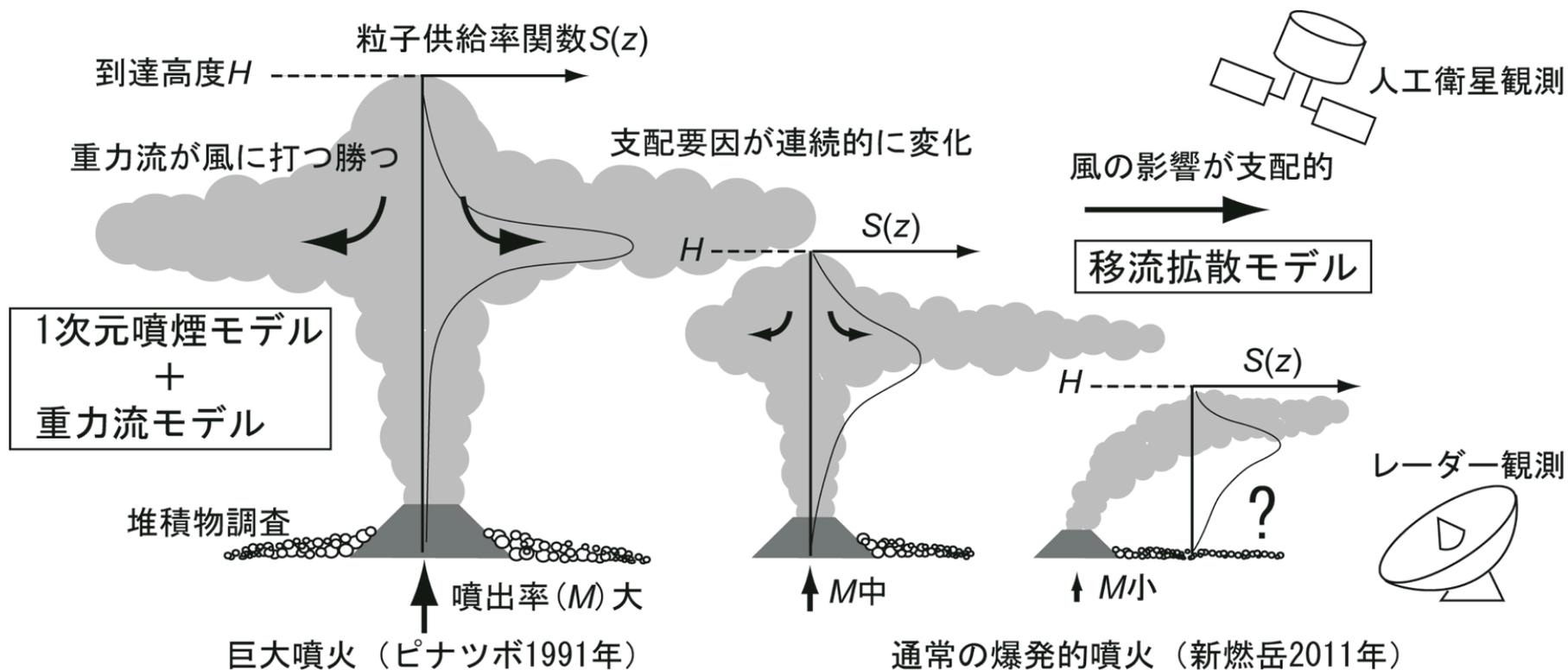
様々な粒径の粒子の堆積作用が少数のパラメータに支配されている。

さらに

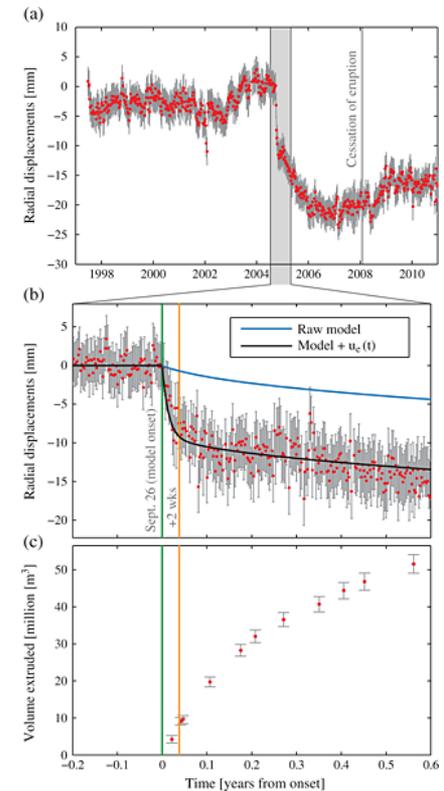


火山灰拡散予測の数理デザインの課題

供給源を支配する物理過程が噴火規模で変わる。



予測したい現象(例2)

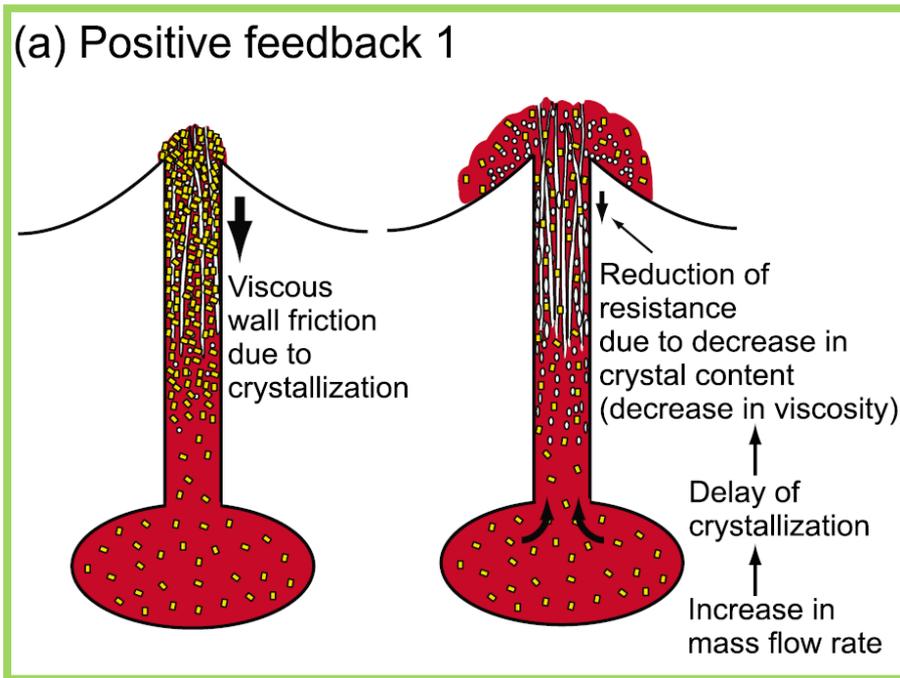


地殻変動に関する
GPSデータ
Anderson and Segall (2013)

マグマ上昇流の特徴

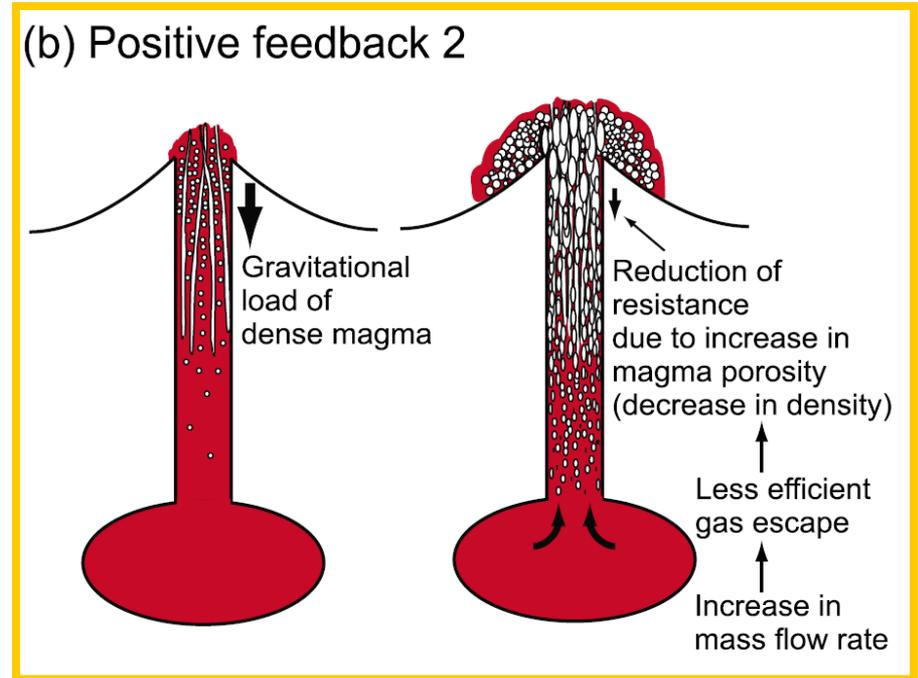
複雑さを生み出す要因

要因1



急上昇すると
結晶化する暇がなくなる
さらに、上昇しやすくなる

要因2

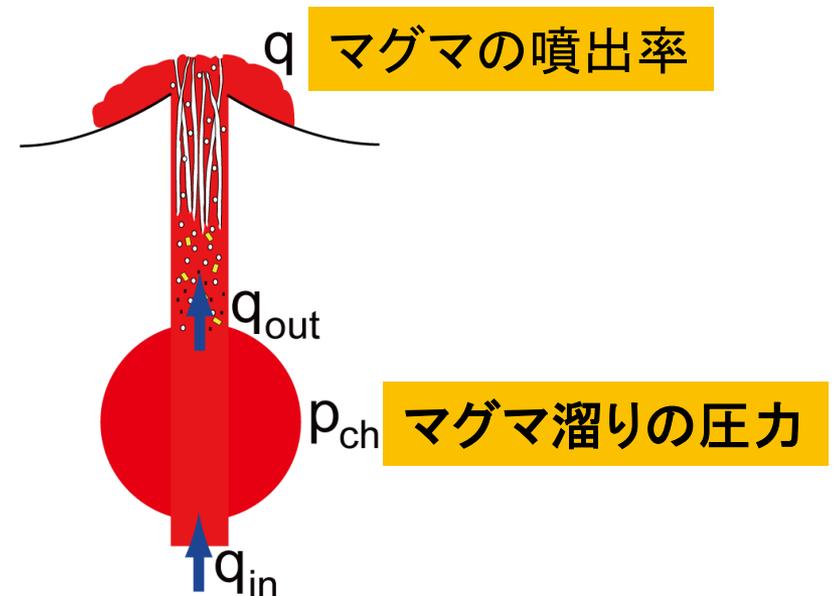
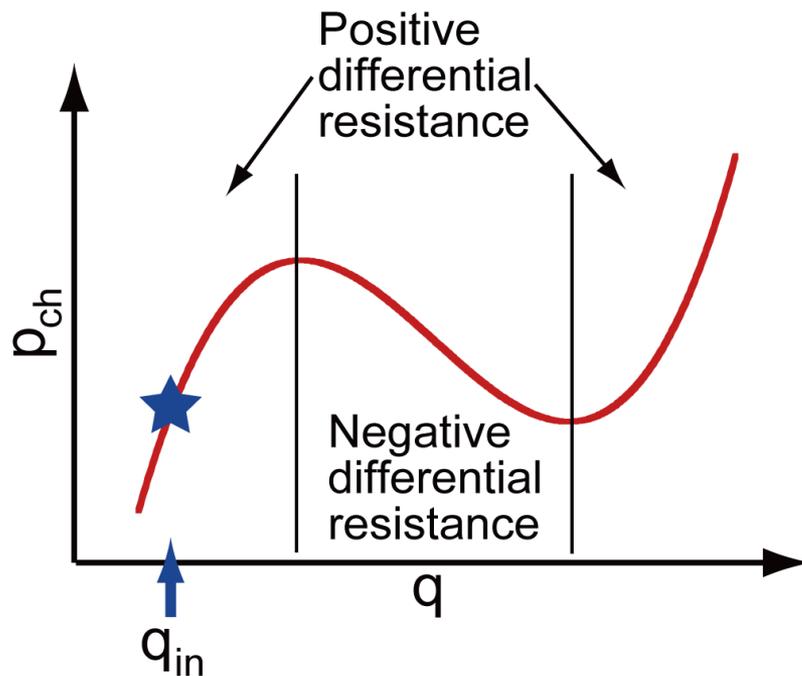


急上昇すると
ガスが抜ける暇がなくなる
さらに、上昇しやすくなる

マグマ供給・噴出系のモデルの特徴

Kozono and Koyaguchi (2012)

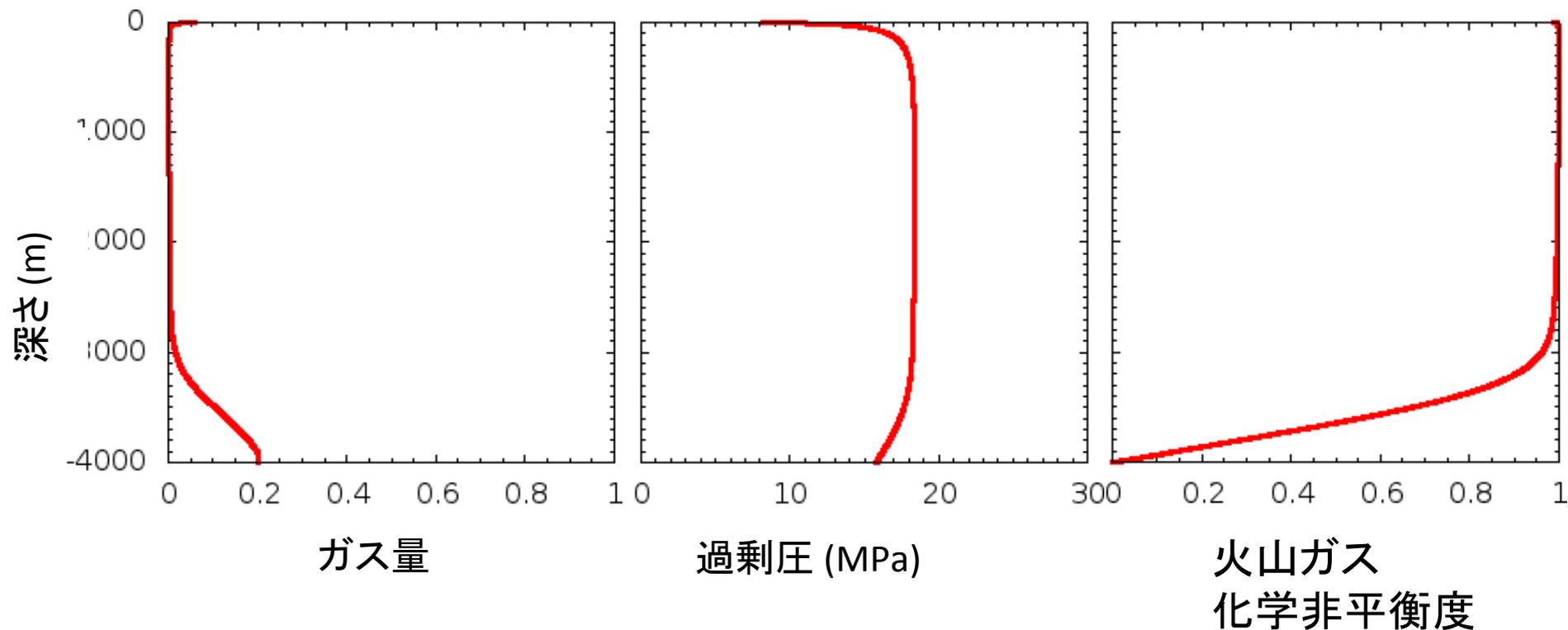
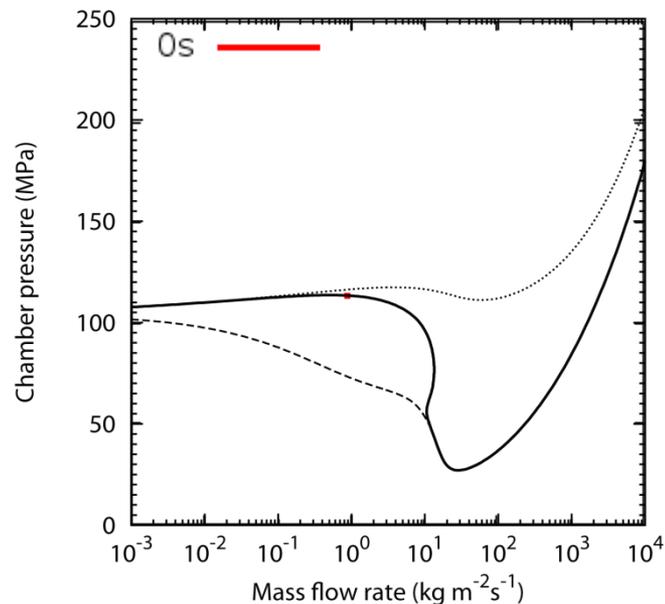
負性抵抗がある流れの系



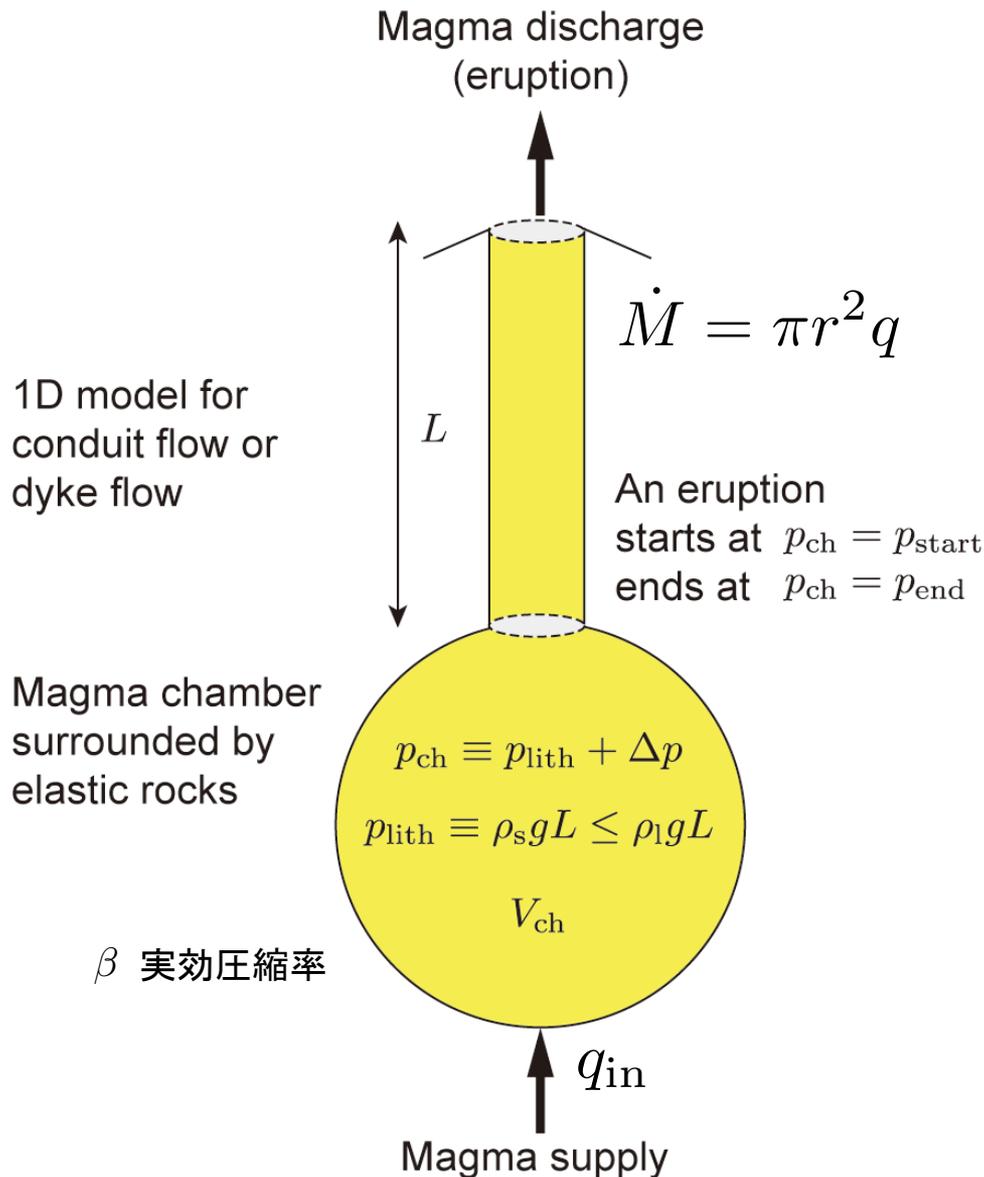
噴火様式の遷移

(偏微分方程式モデルによる
数値計算結果例)

Kozono and Koyaguchi (2012)



マグマ供給・噴出系モデル



2変数力学系モデル

e.g., Ida (1996), Wylie et al. (1999),
Maeda (2000), Barmin et al. (2002),
Melnik and Sparks (2005), Nakanishi
and Koyaguchi (2008), Kozono and
Koyaguchi (2012)

$$\frac{dp_{ch}}{dt} = \frac{\pi r^2}{\beta \rho_{ch} V_{ch}} (q_{in} - q)$$

$$\frac{dq}{dt} = f_{flow}(p_{ch}, q)$$

当面の目標:

単純化したモデルでモデルパラメータ
推定の数理的構造を理解する。

マグマ供給・噴出系モデルに関する モデルパラメータの推定可能性

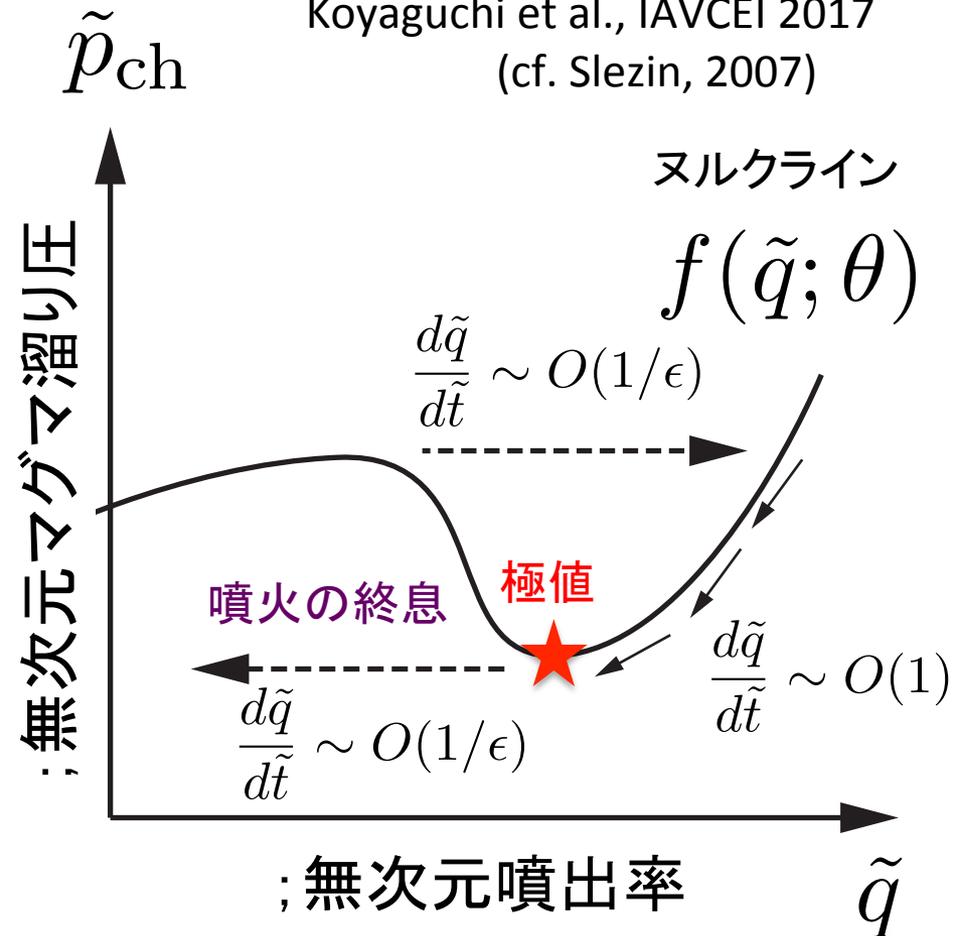
結論: 2変数力学系モデルが以下の形をしている時に、
観測からモデルパラメータの推定ができる。

Koyaguchi et al., IAVCEI 2017
(cf. Slezin, 2007)

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{p}_{ch}}{d\tilde{t}} = \tilde{q}_{in} - \tilde{q} \\ \epsilon \frac{d\tilde{q}}{d\tilde{t}} = \tilde{p}_{ch} - f(\tilde{q}; \theta) \end{cases}$$

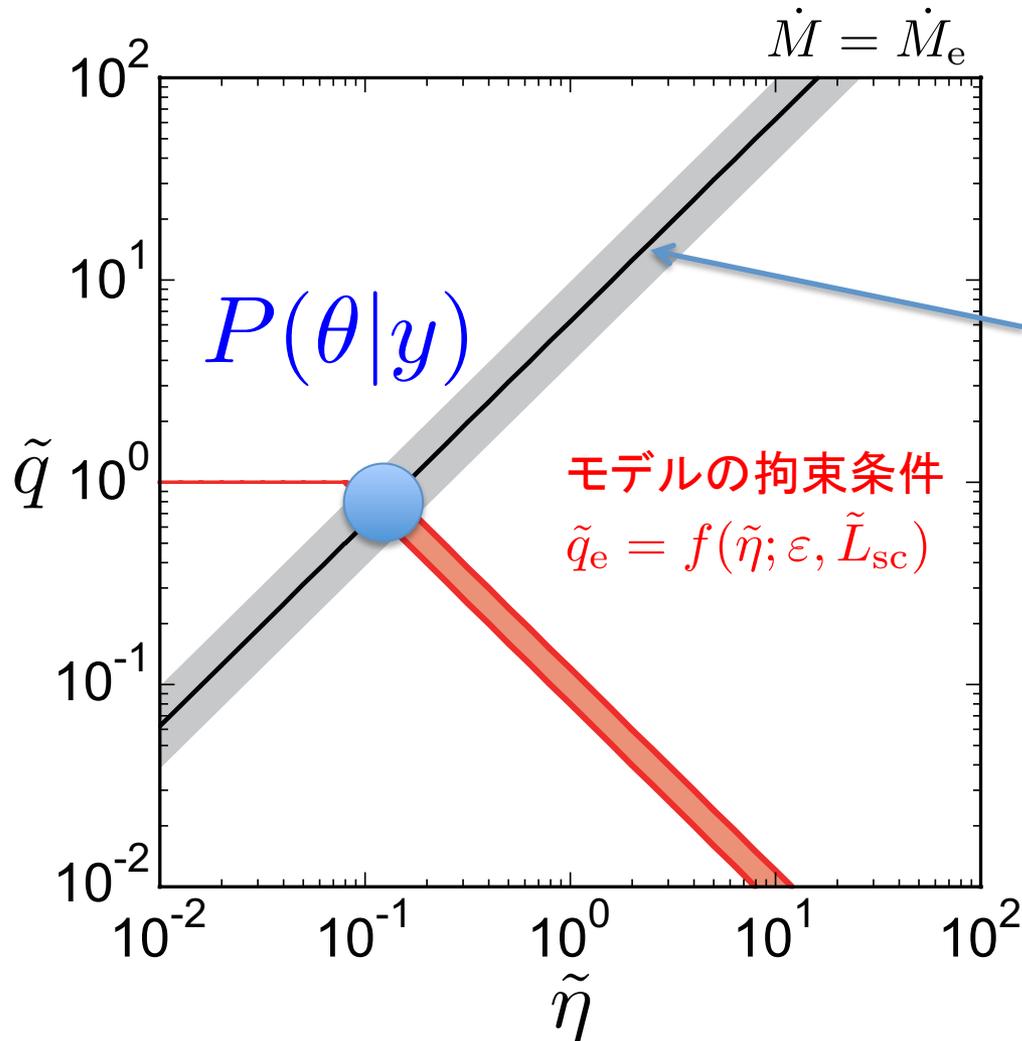
$\tilde{p}_{ch}, \tilde{q}$; 無次元変数

ϵ ; 微小パラメータ



力学系モデルの理解に基づく モデルパラメータの直接推定

Koyaguchi et al. (IAVCEI 2017)



$$\theta = \begin{pmatrix} \tilde{L}_{sc} \\ \tilde{\eta} \\ \tilde{k} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{無次元スケールハイト} \\ \text{無次元粘性} \\ \text{無次元浸透率} \end{array}$$

観測量(噴出率)からの制約

$$\frac{\tilde{q}}{\tilde{\eta}} = \frac{\dot{M}}{\pi r^2 q^* \tilde{\eta}} = \frac{g \rho_1^2 n R T}{8 \pi \eta p_a^2} \dot{M}$$

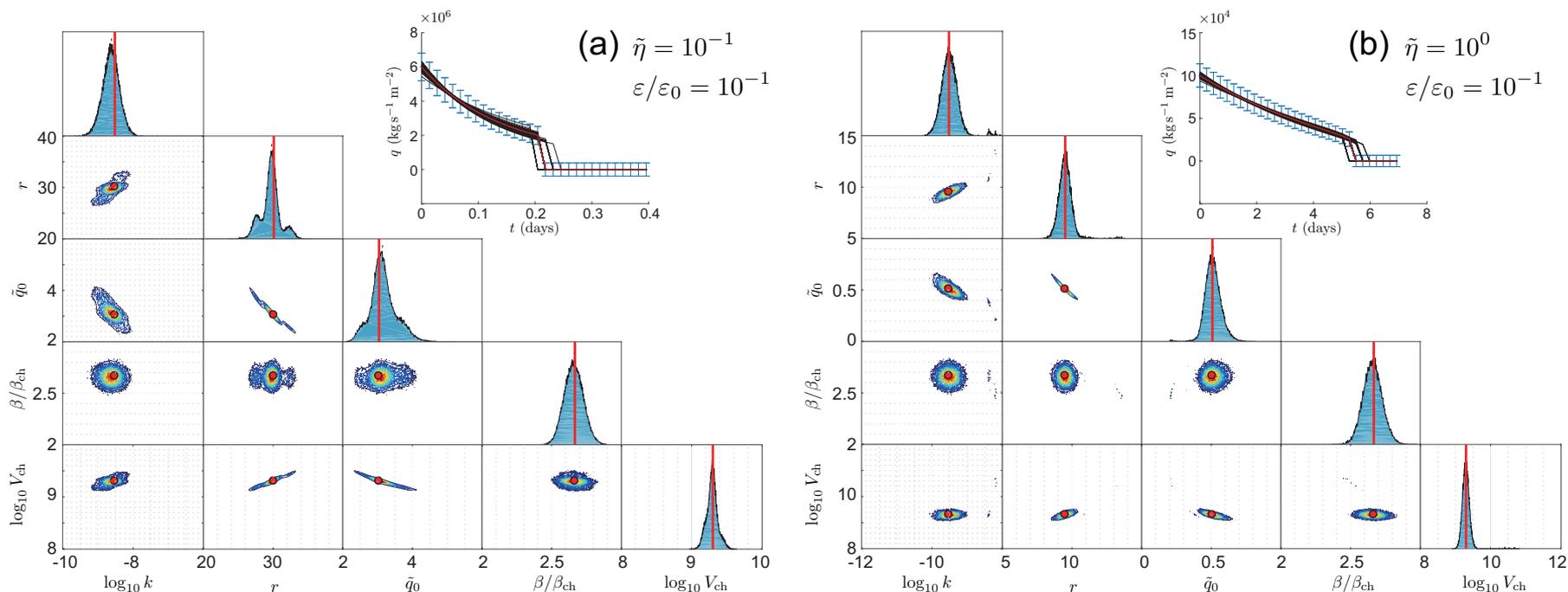
モデルの拘束条件と観測量から
モデルパラメータの確率密度分布関数
の推定が可能.

$$r = \sqrt{\frac{\dot{M} \sqrt{n R T}}{\pi p_a \tilde{q}}}$$

MCMCによるモデルパラメータの事後確率密度分布関数の推定

双子実験による検証

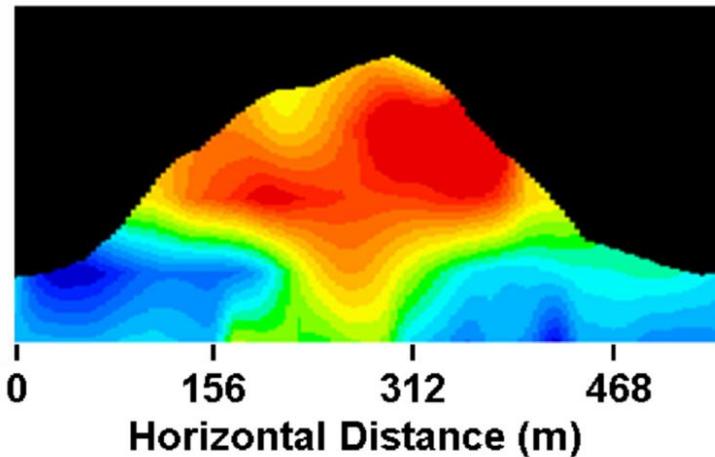
Anderson, Kozonoとの共同研究の予察的結果



双子実験: 数値シミュレーションによって擬似データを作成し, その擬似データからモデルパラメータ(既知)を再現する実験.

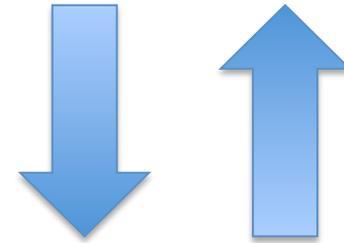
データ同化による 噴火推移予測に向けた観測

Muographyによる火道径の推定?



Tanaka et al.(2007)

噴火終息直前の噴出率



無次元粘性
無次元スケールハイト
無次元浸透率
→火道径

まとめ

- 物理モデルを拘束条件として観測とモデル予測の差を最小化するという考え方(データ同化の考え方)を予測科学の理論的枠組みと考える.

これを基礎として火山現象の各種問題(噴煙モデル, マグマ供給噴出系モデル)の「予測科学に向けた数理デザイン」を行っている.

- 個々の現象の物理モデルの性質を理解することが, 少数の「説明変数」を絞り込む有効な手段となる.

物理モデル研究の蓄積とデータ同化研究の蓄積を連携させてゆくポイントはここになるのではないか?